**TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÝ TỰ TRỌNG**

**TỔ TOÁN – TIN HỌC**

**Chuyên đề www.toanmath.com**

# BẤT ĐẲNG THỨC

***Thực hiện*: Võ Quốc Bá Cẩn**

**Học sinh chuyên Toán, niên khóa 2004 – 2006**



**TPCT – 2006**

# Lời nói đầu

----oOo----

Bất đẳng thức là một trong những vấn đề hay và khó nhất của chương trình toán phổ thông bởi nó có mặt trên hầu khắp các lĩnh vực của toán học và nó đòi hỏi chúng ta phải có một vốn kiến thức tương đối vững vàng trên tất cả các lĩnh vực. Mỗi người chúng ta, đặc biệt là các bạn yêu toán, dù ít dù nhiều thì cũng đã từng đau đầu trước một bất đẳng thức khó và cũng đã từng có được một cảm giác tự hào khi mà mình chứng minh được bất đẳng thức đó. Nhằm "kích hoạt" niềm say mê bất đẳng thức trong các bạn, tôi xin giới thiệu với với các bạn cuốn sách "chuyên đề bất đẳng thức".

Sách gồm các phương pháp chứng minh bất đẳng thức mới mà hiện nay chưa được phổ biến cho lắm. Ngoài ra, trong sách gồm một số lượng lớn bất đẳng thức do tôi tự sáng tác, còn lại là do tôi lấy đề toán trên internet nhưng chưa có lời giải hoặc có lời giải nhưng là lời giải hay, lạ, đẹp mắt. Phần lớn các bài tập trong sách đều do tôi tự giải nên không thể nào tránh khỏi những ngộ nhận, sai lầm, mong các bạn thông cảm.

Hy vọng rằng cuốn sách sẽ giúp cho các bạn một cái nhìn khác về bất đẳng thức và mong rằng qua việc giải các bài toán trong sách sẽ giúp các bạn có thể tìm ra phương pháp của riêng mình, nâng cao được tư duy sáng tạo. Tôi không biết các bạn nghĩ sao nhưng theo quan điểm của bản thân tôi thì nếu ta học tốt về bất đẳng thức thì cũng có thể học tốt các lĩnh vực khác của toán học vì như đã nói ở trên bất đẳng thức đòi hỏi chúng ta phải có một kiến thức tổng hợp tương đối vững vàng. Tôi không nói suông đâu, chắc hẳn bạn cũng biết đến anh Phạm Kim Hùng, sinh viên hệ CNTN khoa toán, trường ĐHKHTN, ĐHQG Hà Nội, người đã được tham dự hai kỳ thi IMO và đều đoạt kết quả cao nhất trong đội tuyển VN. Bạn biết không? Trong thời học phổ thông, anh ấy chỉ chuyên tâm rèn luyện  bất đẳng thức thôi. (Các bạn lưu ý là tôi không khuyến khích bạn làm như tôi và anh ấy đâu nhé!)

Mặc dù đã cố gắng biên soạn một cách thật cẩn thận, nhưng do trình độ có hạn nên không thể tránh khỏi những sai sót, mong các bạn thông cảm và góp ý cho tôi để cuốn sách ngày càng được hoàn thiện hơn. Chân thành cảm ơn.

Mọi đóng góp xin gửi về một trong các địa chỉ sau:

+ Võ Quốc Bá Cẩn, C65 khu dân cư Phú An, phường Phú Thứ, quận Cái Răng, thành phố Cần Thơ.

( 071.916044

+ Email. babylearnmath@yahoo.com

Kính tặng các thầy Đặng Bảo Hòa, Phan Đại Nhơn, Trần Diệu Minh, Huỳnh Bửu Tính, cô Tạ Thanh Thủy Tiên và toàn thể các thầy cô giáo trong tổ Toán Tin, thân tặng các bạn cùng lớp.

# MỘT SỐ BẤT ĐẲNG THỨC THÔNG DỤNG

**1. Bất đẳng thức AM-GM.**

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm thì

$$\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

**2. Bất đẳng thức AM-HM.**

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực dương thì

$$\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \frac{1}{\frac{1}{n}.\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

**3. Bất đẳng thức Bunhiacopxki.**

Cho $2n$ số thực $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó, ta có

$$(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n)^2$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = ... = \frac{a_n}{b_n}$.

**4. Bất đẳng thức Minkowski.**

Cho $2n$ số thực dương $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó với mọi $r \geq 1$, ta có

$$\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^r\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

**5. Bất đẳng thức AM-GM mở rộng.**

Nếu $a_1, a_2, ..., a_n$ là các số thực không âm và $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ là các số thực không âm có tổng bằng 1 thì

$$\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + ... + \beta_n a_n \geq a_1^{\beta_1} a_2^{\beta_2} .. a_n^{\beta_n}$$

**6. Bất đẳng thức Chebyshev.**

Cho $2n$ số thực $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó

a) Nếu $b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n$ thì

$$n.\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

a) Nếu $b_1 \geq b_2 \geq ... \geq b_n$ thì

$$n.\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l} a_1 = a_2 = ... = a_n \\ b_1 = b_2 = ... = b_n \end{array}\right.$

**7. Bất đẳng thức Holder.**

Cho $2n$ số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$. Khi đó với mọi $p, q > 1$ thỏa $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ ta có

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

**8. Bất đẳng thức Schur.**

Với mọi bộ ba số không âm $a, b, c$ và $r \ge 0,$ ta luôn có bất đẳng thức

$$a^r(a-b)(a-c) + b^r(b-c)(b-a) + c^r(c-a)(c-b) \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

**9. Bất đẳng thức Jensen.**

Giả sử $f(x)$ là một hàm lồi trên $[a, b]$. Khi đó, với mọi $x_1, x_2, ..., x_n \in [a, b]$ và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \ge 0$ thỏa $\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = 1$ ta có bất đẳng thức

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \ge \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i)$$

**10. Bất đẳng thức sắp xếp lại.**

Cho 2 dãy đơn điệu cùng tăng $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ và $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$. Khi đó, với $i_1, i_2, ..., i_n$ là một hoán vị bất kì của $1, 2, ..., n$ ta có

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + ... + a_n b_n \ge a_{i_1} b_{i_1} + a_{i_2} b_{i_2} + ... + a_{i_n} b_{i_n} \ge a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + ... + a_n b_1$$

**11. Bất đẳng thức Bernulli.**

Với $x > -1$, ta có

$+$Nếu $r \ge 1 \vee r \le 0$ thì $(1+x)^r \ge 1 + rx$

$+$Nếu $1 > r > 0$ thì $(1+x)^r \le 1 + rx$

# BẤT ĐẲNG THỨC THUẦN NHẤT

## 1. Mở đầu.

Hầu hết các bất đẳng thức cổ điển (AM-GM, Bunhiacopxki, Holder, Minkowsky, Chebyshev ...) đều là các bất đẳng thức thuần nhất. Điều này hoàn toàn không ngẫu nhiên. Về logíc, có thể nói rằng, chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh với nhau một cách toàn cục được.

Chính vì thế, bất đẳng thức thuần nhất chiếm một tỷ lệ rất cao trong các bài toán bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức đại số (khi các hàm số là hàm đại số, có bậc hữu hạn). Đối với các hàm giải tích (mũ, lượng giác, logarith), các bất đẳng thức cũng được coi là thuần nhất vì các hàm số có bậc $\infty$ (theo công thức Taylor).

Trong bài này, chúng ta sẽ đề cập tới các phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất, cũng như cách chuyển từ một bất đẳng thức không thuần nhất về một bất đẳng thức thuần nhất. Nắm vững và vận dụng nhuần nhuyễn các phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh được hầu hết các bất đẳng thức sơ cấp.

## 2. Bất đẳng thức thuần nhất.

Hàm số $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, ..., x_n$ được là hàm thuần nhất bậc $\alpha$ nếu với mọi số thực $t$ ta có

$$f(tx_1, tx_2, ..., tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Bất đẳng thức dạng

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$$

với $f$ là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc $\alpha$).

Ví dụ các bất đẳng thức AM-GM, bất đẳng thức Bunhiacopxki, bất đẳng thức Chebyshev là các bất đẳng thức thuần nhất. Bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức $\sin x < x$ với $x > 0$ là các bất đẳng thức không thuần nhất.

## 3. Chứng minh bất đẳng thức thuần nhất.

### 3.1. Phương pháp dồn biến.

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!). Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0 \qquad (1)$$

Ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, ..., x_n\right) \qquad (2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f\left(\sqrt{x_1 x_2}, \sqrt{x_1 x_2}, ..., x_n\right) \qquad (3)$$

Sau đó chuyển việc chứng minh (1) về việc chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_1, x_3, ..., x_n) = g(x_1, x_3, ..., x_n) \geq 0 \qquad (4)$$

tức là một bất đẳng thức có số biến ít hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (2), (3) có thể không đúng hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi 2 biến số nên thông thường thì tính đúng đắn của bất đẳng thức này có thể kiểm tra được dễ dàng.

**Ví dụ 1.**

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2$$

***Chứng minh.***

Xét hàm số $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2)$

Ta có

$$f(a, b, c) - f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) = \left(b + c - \frac{5a}{4}\right)(b - c)^2$$

Do đó, nếu $a=\min\{a,b,c\}$ (điều này luôn có thể giả sử) thì ta có

$$f(a,b,c)\ge f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$f(a,b,b)\ge 0$$

Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3+2b^3+3ab^2-(a^2b+a^2b+b^2a+b^3+b^2a+b^3)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a^3+ab^2-2a^2b\ge 0$$
$$\Leftrightarrow a(a-b)^2\ge 0$$

**Ví dụ 2. (Vietnam TST 1996)**

Cho $a,b,c$ là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$F(a,b,c)=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}.(a^4+b^4+c^4)\ge 0$$

***Lời giải.***

Ta có

$$F(a,b,c)-F\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=$$
$$=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}.(a^4+b^4+c^4)-$$
$$-2\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^4-(b+c)^4+\frac{4}{7}.\left(a^4+2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right)$$
$$=(a+b)^4+(c+a)^4-2\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^4+\frac{4}{7}.\left(\frac{(b+c)^4}{8}-b^4-c^4\right)$$
$$=a(4b^3+4c^3-(b+c)^3)+3a^2(2b^2+2c^2-(b+c)^2)+\frac{3}{7}\left(b^4+c^4-\frac{(b+c)^4}{8}\right)$$
$$=3a(b+c)(b-c)^2+3a^2(b-c)^2+\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc)$$
$$=3a(a+b+c)(b-c)^2+\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc)$$

Số hạng $\frac{3}{56}(b-c)^2(7b^2+7c^2+10bc)$ luôn không âm. Nếu $a,b,c$ cùng dấu thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu $a,b,c$ không cùng dấu thì phải có ít nhất 1 trong ba số $a,b,c$ cùng dấu với $a+b+c$. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là $a$.

Từ đẳng thức trên suy ra $F(a,b,c) \geq F\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$. Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh

$$F(a,b,b) \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbf{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^4+(2b)^4-\frac{4}{7}.(a^4+2b^4) \geq 0 \quad \forall a,b \in \mathbf{R}$$

Nếu $b=0$ thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $b \neq 0$, chia hai vế của bất đẳng thức cho $b^4$ rồi đặt $x=\frac{a}{b}$ thì ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(x+1)^4+16-\frac{4}{7}.(x^4+2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể chứng minh như sau

Xét $f(x)=2(x+1)^4+16-\frac{4}{7}.(x^4+2)$

Ta có

$$f'(x)=8(x+1)^3-\frac{16}{7}.x^3$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}.x \Leftrightarrow x=-2.9294$$

$$f_{\min}=f(-2.9294)=0.4924>0$$

(Các phần tính toán cuối được tính với độ chính xác tới 4 chữ số sau dấu phẩy. Do $f_{\min}$ tính được là 0.4924 nên nếu tính cả sai số tuyệt đối thì giá trị chính xác của $f_{\min}$ vẫn là một số dương. Vì đây là một bất đẳng thức rất chặt nên không thể tránh

được các tính toán với số lẻ trên đây. Chẳng hạn nếu thay $\frac{4}{7}$ bằng $\frac{16}{27}$ để $x_{\min} = -3$ thì $f^*_{\min}$ có giá trị âm! Ở đây $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7}.(x^4 + 2)$.)

## 3.2. Phương pháp chuẩn hóa.

Dạng thường gặp của bất đẳng thức thuần nhất là

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq g(x_1, x_2, ..., x_n)$$

trong đó $f$ và $g$ là hai hàm thuần nhất cùng bậc.

Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq A$ với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ thỏa mãn điều kiện $g(x_1, x_2, ..., x_n) = A$. Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

**Ví dụ 3. (Bất đẳng thức về trung bình lũy thừa)**

Cho bộ $n$ số thực dương $(x) = (x_1, x_2, ..., x_n)$. Với mỗi số thực $r$ ta đặt

$$M_r(x) = \left( \frac{x_1^r + x_2^r + ... + x_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}}$$

Chứng minh rằng với mọi $r > s > 0$ ta có $M_r(x) \geq M_s(x)$.

***Lời giải.***

Vì $M_r(tx) = tM_r(x)$ với mọi $t > 0$ nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng cho các số thực dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$, tức là cần chứng minh $M_r(x) \geq 1$ với mọi $x_1, x_2, ..., x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$. Điều này có thể viết đơn giản lại là

Chứng minh $x_1^r + x_2^r + ... + x_n^r \geq n$ với $x_1^s + x_2^s + ... + x_n^s = n$.

Để chứng minh bất đẳng thức cuối cùng, ta áp dụng bất đẳng thức Bernoulli

$$x_i^r = (x_i^s)^{\frac{r}{s}} = (1 + (x_i^s - 1))^{\frac{r}{s}} \geq 1 + \frac{r}{s}.(x_i^s - 1) \;\; \forall i = \overline{1, n}$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được điều phải chứng minh.

**Ví dụ 4. (VMO 2002)**

Chứng minh rằng với $x, y, z$ là các số thực bất kỳ ta có bất đẳng thức

$$6(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \le 27xyz + 10(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

***Lời giải.***

Bất đẳng thức này rất cồng kềnh. Nếu thực hiện phép biến đổi trực tiếp sẽ rất khó khăn (ví dụ thử bình phương để khử căn). Ta thực hiện phép chuẩn hóa để đơn giản hóa bất đẳng thức đã cho. Nếu $x^2+y^2+z^2=0$, thì $x=y=z=0$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Nếu $x^2+y^2+z^2>0$, do bất đẳng thức đã cho là thuần nhất, ta có thể giả sử $x^2+y^2+z^2=9$. Ta cần chứng minh $2(x+y+z) \le xyz+10$ với điều kiện $x^2+y^2+z^2=9$. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh

$$[2(x+y+z)-xyz]^2 \le 100$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $|x| \le |y| \le |z|$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxky, ta có

$$\begin{aligned}
[2(x+y+z)-xyz]^2 &= [2(x+y)+z(2-xy)]^2 \\
&\le [(x+y)^2+z^2][4+(2-xy)^2] \\
&= (9+2xy)(8-4xy+x^2y^2) \\
&= 72-20xy+x^2y^2+2x^3y^3 \\
&= 100+(xy+2)^2(2xy-7)
\end{aligned}$$

Từ $|x| \le |y| \le |z| \Rightarrow z^2 \ge 3 \Rightarrow 2xy \le x^2+y^2 \le 6,$ tức là $(xy+2)^2(2xy-7) \le 0$. Từ đây, kết hợp với đánh giá trên đây ta được điều cần chứng minh.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2} = \dfrac{z}{2-xy} \\ xy+2=0 \end{cases}$.

Từ đây giải ra được $x=-1, y=2, z=2$.

Kĩ thuật chuẩn hóa cho phép chúng ta biến một bất đẳng thức phức tạp thành một bất đẳng thức có dạng đơn giản hơn. Điều này giúp ta có thể áp dụng các biến đổi đại số một cách dễ dàng hơn, thay vì phải làm việc với các biểu thức cồng kềnh ban

đầu. Đặc biệt, sau khi chuẩn hóa xong, ta vẫn có thể áp dụng phương pháp dồn biến để giải. Ta đưa ra lời giải thứ hai cho bài toán trên

Đặt $f(x,y,z)=2(x+y+z)-xyz$.

Ta cần chứng minh $f(x,y,z)\le 10$ với $x^2+y^2+z^2=9$.

Xét

$$f\left(x,\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)-f(x,y,z)=2\left(\sqrt{2(y^2+z^2)}-y-z\right)-\frac{x(y-z)^2}{2}$$

$$=(y-z)^2\left(\frac{2}{\sqrt{2(y^2+z^2)}+y+z}-\frac{x}{2}\right)$$

+ Nếu $x,y,z>0$, ta xét hai trường hợp

* $1\le x\le y\le z$. Khi đó

$$2(x+y+z)-xyz\le 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}-1=6\sqrt{3}-1<10$$

* $0<x\le 1$. Khi đó

$$2(x+y+z)-xyz\le 2x+2\sqrt{2(y^2+z^2)}=2x+2\sqrt{2(9-x^2)}=g(x)$$

Ta có $g'(x)=\dfrac{2\left(\sqrt{9-x^2}-x\sqrt{2}\right)}{\sqrt{9-x^2}}>0$, suy ra $g(x)\le g(1)=10$.

+ Nếu trong 3 số $x,y,z$ có một số âm, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử là $x<0$. Khi đó $f\left(x,\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\dfrac{y^2+z^2}{2}}\right)\ge f(x,y,z)$, nên ta chỉ cần chứng minh

$$f\left(x,\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}},\sqrt{\frac{y^2+z^2}{2}}\right)\le 10$$

$$\Leftrightarrow 2x+2\sqrt{2(9-x^2)}-\frac{x(9-x^2)}{2}\le 10$$

$$\Leftrightarrow h(x)=x^3-5x+4\sqrt{2(9-x^2)}\le 20$$

Ta có $h'(x)=3x^2-5-\dfrac{4x\sqrt{2}}{\sqrt{9-x^2}}$.

Giải phương trình $h^{/}(x)=0$ (với $x<0$), ta được $x=-1$. Đây là điểm cực đại của $h$, do đó $h(x)\le h(-1)=20$.

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể đưa một bài toán bất đẳng thức về bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một hàm số trên một miền (chẳng hạn trên hình cầu $x^2+y^2+z^2=9$ như ở ví dụ 4). Điều này cho phép chúng ta vận dụng được một số kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (ví dụ như bất đẳng thức Jensen, hàm lồi,...).

**Ví dụ 5.**

Cho $a,b,c$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$$

***Lời giải.***

Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số dương $a,b,c$ thoả $a+b+c=1$.

Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{(1-2a)^2}{2a^2-2a+1}+\frac{(1-2b)^2}{2b^2-2b+1}+\frac{(1-2c)^2}{2c^2-2c+1}\ge\frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2a^2-2a+1}+\frac{1}{2b^2-2b+1}+\frac{1}{2c^2-2c+1}\le\frac{27}{5}$$

$$\Leftrightarrow f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{27}{5}\qquad(5.1)$$

Trong đó $f(x)=\dfrac{1}{2x^2-2x+1}$

Để ý rằng $\dfrac{27}{5}=3f\left(\dfrac{1}{3}\right)$, ta thấy (5.1) có dạng bất đẳng thức Jensen. Tuy nhiên, tính đạo hàm cấp hai của $f(x)$, ta có

$$f^{//}(x)=\frac{4(6x^2-6x+1)}{(2x^2-2x+1)^3}$$

hàm chỉ lồi trên khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$ nên không thể áp dụng bất đẳng thức Jensen một cách trực tiếp. Ta chứng minh $f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{27}{5}$ bằng các nhận xét bổ sung sau

$f_{\max}=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$

$f(x)$ tăng trên $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ và giảm trên $\left(\frac{1}{2},1\right)$

$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)=f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)=\frac{12}{7}$

Nếu có ít nhất 2 trong 3 số $a,b,c$ nằm trong khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$, chẳng hạn là $a$, $b$ thì áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(a)+f(b)\le 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)=2f\left(\frac{1-c}{2}\right)=\frac{4}{c^2+1}$$

Như vậy trong trường hợp này, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{1}{2c^2-2c+1}+\frac{4}{c^2+1}\le\frac{27}{5}$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn ta được bất đẳng thức tương đương

$$27c^4-27c^3+18c^2-7c+1\ge 0$$
$$\Leftrightarrow (3c-1)^2(3c^2-c+1)\ge 0\ \text{(ñuùng)}$$

Như vậy, ta chỉ còn cần xét trường hợp có ít nhất hai số nằm ngoài khoảng $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3+\sqrt{3}}{6}\right)$. Nếu chẳng hạn $a\ge\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ thì rõ ràng $b,c\le\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ và như vậy, do nhận xét trên $f(a)+f(b)+f(c)\le\frac{36}{7}<\frac{27}{5}$.

Ta chỉ còn duy nhất một trường hợp cần xét là có hai số, chẳng hạn $a,b\le\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Lúc này, do $a+b \le 1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ nên $c \ge \frac{\sqrt{3}}{3} > \frac{1}{2}$.

Theo các nhận xét trên, ta có

$$f(a)+f(b)+f(c) \le 2f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{24}{7}+\frac{15+6\sqrt{3}}{13}<\frac{27}{5}.$$

**Ghi chú.**

Bài toán trên có một cách giải ngắn gọn và độc đáo hơn như sau

Bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b(c+a)}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c(a+b)}{c^2+(a+b)^2} \le \frac{6}{5}$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a+b+c=1$. Khi đó, bất đẳng thức viết lại thành

$$\frac{a(1-a)}{2a^2-2a+1}+\frac{b(1-b)}{2b^2-2b+1}+\frac{c(1-c)}{2c^2-2c+1} \le \frac{6}{5}$$

Ta có $2a(1-a) \le \frac{(a+1)^2}{4}$. Do đó $1-2a+2a^2 \ge 1-\frac{(a+1)^2}{4}=\frac{(1-a)(3+a)}{4}$. Từ đó

$$\frac{a(1-a)}{2a^2-2a+1} \le \frac{a(1-a)}{\frac{(1-a)(3+a)}{4}}=\frac{4a}{3+a}$$

Tương tự

$$\frac{b(1-b)}{2b^2-2b+1} \le \frac{4b}{3+b}$$
$$\frac{c(1-c)}{2c^2-2c+1} \le \frac{4c}{3+c}.$$

Và để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{4a}{3+a}+\frac{4b}{3+b}+\frac{4c}{3+c} \le \frac{6}{5}$$

Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với $\frac{1}{3+a}+\frac{1}{3+b}+\frac{1}{3+c} \ge \frac{9}{10}$ là hiển nhiên (Áp dụng BĐT AM-GM).

Chuẩn hóa là một kỹ thuật cơ bản. Tuy nhiên, kỹ thuật đó cũng đòi hỏi những kinh nghiệm và độ tinh tế nhất định. Trong ví dụ trên, tại sao ta lại chuẩn hóa $x^2+y^2+z^2=9$ mà không phải là $x^2+y^2+z^2=1$ (tự nhiên hơn)? Và ta có đạt được những hiệu quả mong muốn không nếu như chuẩn hóa $x+y+z=1$? Đó là những vấn đề mà chúng ta phải suy nghĩ trước khi thực hiện bước chuẩn hóa.

### 3.3. Phương pháp trọng số.

Bất đẳng thức AM-GM và bất đẳng thức Bunhiacopxki là những bất đẳng thức thuần nhất. Vì thế, chúng rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức thuần nhất. Tuy nhiên, do điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức này rất nghiêm ngặt nên việc áp dụng một cách trực tiếp và máy móc đôi khi khó đem lại kết quả. Để áp dụng tốt các bất đẳng thức này, chúng ta phải nghiên cứu kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng và áp dụng phương pháp trọng số.

**Ví dụ 6.**

Chứng minh rằng nếu $x,y,z$ là các số thực không âm thì

$$6(-x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+27xyz\le 10(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$$

***Lời giải.***

Sử dụng nguyên lý cơ bản "dấu bằng xảy ra khi một cặp biến số nào đó bằng nhau", ta có thể tìm ta được dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra khi $y=z=2x$. Điều này cho phép chúng ta mạnh dạn đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
&10(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}-6(-x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=\\
&=(x^2+y^2+z^2)\left(10(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}-6(-x+y+z)\right)\\
&=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{10}{3}.(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}(1^2+2^2+2^2)^{\frac{1}{2}}-6(-x+y+z)\right)\\
&\ge(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{10}{3}.(x+2y+2z)-6(-x+y+z)\right)\\
&=\frac{(x^2+y^2+z^2)(28x+2y+2z)}{3} \qquad (6.1)
\end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$x^2+y^2+z^2=x^2+4\left(\frac{y^2}{4}\right)+4\left(\frac{z^2}{4}\right)\ge 9\sqrt[9]{x^2\left(\frac{y^2}{4}\right)^4\left(\frac{z^2}{4}\right)^4}=9\sqrt[9]{\frac{x^2y^8z^8}{4^8}}$$

$$28x+2y+2z=7.4x+2y+2z\ge 9\sqrt[9]{(4x)^7(2y)(2z)}=9\sqrt[9]{4^8x^7yz}$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$(x^2+y^2+z^2)(28x+2y+2z)\ge 9\sqrt[9]{\frac{x^2y^8z^8}{4^8}}.9\sqrt[9]{4^8x^7yz}=81xyz \quad (6.2)$$

Từ (6.1) và (6.2) ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng cả bất đẳng thức Bunhiacopxki và bất đẳng thức AM-GM có trọng số. Lời giải rất hiệu quả và ấn tượng. Tuy nhiên, sự thành công của lời giải trên nằm ở hai dòng ngắn ngủi ở đầu. Không có được “dự đoán” đó, khó có thể thu được kết quả mong muốn. Dưới đây ta sẽ xét một ví dụ về việc chọn các trọng số thích hợp bằng phương pháp hệ số bất định để các điều kiện xảy ra dấu bằng được thoả mãn.

**Ví dụ 7.**

Chứng minh rằng nếu $0\le x\le y$ thì ta có bất đẳng thức

$$13x(y^2-x^2)^{\frac{1}{2}}+9x(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}}\le 16y^2$$

***Lời giải.***

Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho các tích ở vế trái. Tuy nhiên, nếu áp dụng một cách trực tiếp thì ta được

$$VT\le\frac{13(x^2+y^2-x^2)}{2}+\frac{9(x^2+y^2+x^2)}{2}=9x^2+11y^2 \quad (7.1)$$

Đây không phải là điều mà ta cần (Từ đây chỉ có thể suy ra $VT\le 20y^2$). Sở dĩ ta không thu được đánh giá cần thiết là vì dấu bằng không thể đồng thời xảy ra ở hai lần áp dụng bất đẳng thức AM-GM. Để điều chỉnh, ta đưa vào các hệ số dương $a,b$ như sau

$$VT = \frac{13(ax)(y^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}}{a} + \frac{9(by)(y^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}}{b}$$
$$\le \frac{13(a^2x^2 + y^2 - x^2)}{2a} + \frac{9(b^2x^2 + y^2 + x^2)}{2b} \qquad (7.2)$$

Đánh giá trên đúng với mọi $a, b > 0$ (chẳng hạn với $a = b = 1$ ta được (7.1)) và ta sẽ phải chọn $a, b$ sao cho

a) Vế phải không phụ thuộc vào $x$

b) Dấu bằng có thể đồng thời xảy ra ở hai bất đẳng thức

Yêu cầu này tương đương với hệ

$$\begin{cases} \dfrac{13(a^2-1)}{2a} + \dfrac{9(b^2+1)}{2b} = 0 \\ \exists x, y : \begin{cases} a^2x^2 = y^2 - x^2 \\ b^2x^2 = y^2 + x^2 \end{cases} \end{cases}$$

Tức là có hệ $\begin{cases} \dfrac{13(a^2-1)}{2a} + \dfrac{9(b^2+1)}{2b} = 0 \\ a^2 + 1 = b^2 - 1 \end{cases}$.

Giải hệ ra, ta được $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{2} \end{cases}$. Thay hai giá trị này vào (7.2) ta được

$$VT \le 13\left(\frac{x^2}{4} + y^2 - x^2\right) + 3\left(\frac{9x^2}{4} + y^2 + x^2\right) = 16y^2$$

**Ghi chú.**

Trong ví dụ trên, thực chất ta đã cố định $y$ và tìm giá trị lớn nhất của vế trái khi $x$ thay đổi trong đoạn $[0, y]$.

## 4. Bất đẳng thức thuần nhất đối xứng.

Khi gặp các bất đẳng thức dạng đa thức thuần nhất đối xứng, ngoài các phương pháp trên, ta còn có thể sử dụng phương pháp khai triển trực tiếp và dụng định lý về nhóm các số hạng. Phương pháp này cồng kềnh, không thật đẹp nhưng đôi lúc tỏ ra

khá hiệu quả. Khi sử dụng bằng phương pháp này, chúng ta thường dùng các ký hiệu quy ước sau để đơn giản hóa cách viết

$$\sum_{sym} Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{\sigma} Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

trong đó, $\sigma$ chạy qua tất cả các hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$.

Ví dụ với $n = 3$ và ba biến số $x, y, z$ thì

$$\sum_{sym} x^3 = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$$

$$\sum_{sym} x^2 y = x^2 y + y^2 z + z^2 x + x^2 z + z^2 y + y^2 x$$

$$\sum_{sym} xyz = 6xyz$$

Đối với các biểu thức không hoàn toàn đối xứng, ta có thể sử dụng ký hiệu hoán vị vòng quanh như sau

$$\sum_{cyc} x^2 y = x^2 y + y^2 z + z^2 x$$

Phương pháp này được xây dựng dựa trên tính so sánh được của một số tổng đối xứng cùng bậc - định lý về nhóm các số hạng (hệ quả của bất đẳng thức Karamata) mà chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh dưới đây. Trong trường hợp 3 biến, ta còn có đẳng thức Schur.

Nếu $s = (s_1, s_2, ..., s_n)$ và $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ là hai dãy số không tăng. Ta nói rằng $s$ là trội của $t$ nếu $\begin{cases} s_1 + s_2 + ... + s_n = t_1 + t_2 + ... + t_n \\ s_1 + s_2 + ... + s_i \geq t_1 + t_2 + ... + t_i \quad \forall i = \overline{1, n} \end{cases}$.

**Định lý Muirhead. ("Nhóm")**

Nếu $s$ và $t$ là các dãy số thực không âm sao cho $s$ là trội của $t$ thì

$$\sum_{sym} x_1^{s_1} x_2^{s_2} ... x_n^{s_n} \geq \sum_{sym} x_1^{t_1} x_2^{t_2} ... x_n^{t_n}$$

***Chứng minh.***

Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu $s$ là trội của $t$ thì tồn tại các hằng số không âm $k_\sigma$, với $\sigma$ chạy qua tập hợp tất cả các hoán vị của $\{1,2,...,n\}$, có tổng bằng 1 sao cho

$$\sum_\sigma k_\sigma (s_{\sigma(1)}, s_{\sigma(2)},..., s_{\sigma(n)}) = (t_1, t_2,..., t_n)$$

Sau đó, áp dụng bất đẳng thức AM-GM như sau

$$\sum_\sigma x_1^{s_{\sigma(1)}} x_2^{s_{\sigma(2)}} ... x_n^{s_{\sigma(n)}} = \sum_{\sigma,\tau} k_\tau x_1^{s_{\sigma(\tau(1))}} x_2^{s_{\sigma(\tau(2))}} ... x_n^{s_{\sigma(\tau(n))}} \geq \sum_\sigma x_1^{t_{\sigma(1)}} x_2^{t_{\sigma(2)}} ... x_n^{t_{\sigma(n)}}$$

Ví dụ, với $s = (5,2,1)$ và $t = (3,3,2)$, ta có

$$(3,3,2) = \frac{3}{8}.(5,2,1) + \frac{3}{8}. + \frac{1}{8}.(2,1,5) + \frac{1}{8}.(1,2,5)$$

Và ta có đánh giá

$$\frac{3x^5y^2z + 3x^2y^5z + x^2yz^5 + xy^2z^5}{8} \geq x^3y^3z^2$$

Cộng bất đẳng thức trên và các bất đẳng thức tương tự, ta thu được bất đẳng thức

$$\sum_{sym} x^5y^2z \geq \sum_{sym} x^3y^3z^2$$

**Ví dụ 8.**

Chứng minh rằng với mọi số thực dương $a,b,c$ ta có

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc} + \frac{1}{b^3+c^3+abc} + \frac{1}{c^3+a^3+abc} \leq \frac{1}{abc}$$

***Lời giải.***

Quy đồng mẫu số và nhân hai vế cho 2, ta có

$$\sum_{sym} (a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \leq$$

$$\leq 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (a^7bc + 3a^4b^4c + 4a^5b^2c^2 + a^3b^3c^3) \leq$$

$$\leq \sum_{sym} (a^3b^3c^3 + 2a^6b^3 + 3a^4b^4c + 2^5b^2c^2 + a^7bc)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym} (2a^6b^3 - 2a^5b^2c^2) \geq 0$$

Bất đẳng thức này đúng theo định lý nhóm.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã gặp may vì sau khi thực hiện các phép biến đổi đại số, ta thu được một bất đẳng thức tương đối đơn giản, có thể áp dụng trực tiếp định lý nhóm. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào định lý này cũng đủ để giải quyết vấn đề. Trong trường hợp 3 biến số, ta có một kết quả rất đẹp khác là định lý Schur.

**Định lý. (Schur)**

Cho $x, y, z$ là các số thực không âm. Khi đó với mọi $r > 0$

$$x^r(x-y)(x-z)+y^r(y-z)(y-x)+z^r(z-x)(z-y)\geq 0$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hay khi hai trong ba số $x, y, z$ bằng nhau còn số thứ ba bằng 0.

***Chứng minh.***

Vì bất đẳng thức hoàn toàn đối xứng đối với ba biến số, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$(x-y)(x^r(x-z)-y^r(y-z))+z^r(x-z)(y-z)\geq 0$$

và mỗi một thừa số ở vế trái đều hiển nhiên không âm.

Trường hợp hay được sử dụng nhất của bất đẳng thức Schur là khi $r = 1$. Bất đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng

$$\sum_{sym}(x^2-2x^2y+xyz)\geq 0$$

Đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ 1.

**Ví dụ 9.**

Cho $a, b, c$ là các số dương. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

***Lời giải.***

Quy đồng mẫu số, khai triển và rút gọn, ta được

$$\sum_{sym}(4a^5b-a^4b^2-3a^3b^3+a^4bc-2a^3b^2c+a^2b^2c^2)\geq 0 \qquad (9.1)$$

Dùng bất đẳng thức Schur

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geq 0$$

Nhân hai vế với $2xyz$ rồi cộng lại, ta được

$$\sum_{sym}(a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2) \geq 0 \qquad (9.2)$$

Ngoài ra, áp dụng định lý nhóm (hay nói cách khác – bất đẳng thức AM-GM có trọng số) ta có

$$\sum_{sym}(4a^5b - a^4b^2 - 3a^3b^3) \geq 0 \qquad (9.3)$$

Từ (9.2), (9.3) suy ra (9.1) và đó chính là điều phải chứng minh.

Nói đến bất đẳng thức thuần nhất đối xứng, không thể không nói đến các hàm số đối xứng cơ bản. Đó là các biểu thức $S_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, S_2 = \sum_{1\le i<j\le n} x_i x_j, ..., S_n = x_1x_2...x_n$.

Với các bất đẳng thức liên quan đến các hàm đối xứng này, có một thủ thuật rất hữu hiệu được gọi là "thủ thuật giảm biến số bằng định lý Rolle". Chúng ta trình bày ý tưởng của thủ thuật này thông qua ví dụ sau

**Ví dụ 10.**

Cho $a,b,c,d$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \geq \left(\frac{abc+abd+acd+bcd}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$$

***Lời giải.***

Đặt $S_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd, S_3 = abc+abd+acd+bcd$. Xét đa thức

$$P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + S_2x^2 - S_3x + abcd$$

$P(x)$ có 4 nghiệm thực $a,b,c,d$ (nếu có các nghiệm trùng nhau thì đó là nghiệm bội). Theo định lý Rolle, $P'(x)$ cũng có 3 nghiệm (đều dương) $u,v,w$. Do $P'(x)$ có hệ số cao nhất bằng 4 nên

$$P'(x) = 4(x-u)(x-v)(x-w) = 4x^3 - 4(u+v+w)x^2 + 4(uv+vw+wu)x - 4uvw$$

Mặt khác

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + S_2x - S_3$$

suy ra $S_2 = 2(uv+vw+wu), S_3 = 4uvw$ và bất đẳng thức cần chứng minh ở đầu bài có thể viết lại theo ngôn ngữ $u,v,w$ là

$$\left(\frac{uv+vw+wu}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \geq (uvw)^{\frac{1}{3}}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức AM-GM.

### 5. Thuần nhất hóa bất đẳng thức không thuần nhất.

Trong các phần trên, chúng ta đã trình bày các phương pháp cơ bản để chứng minh một bất đẳng thức thuần nhất. Đó không phải là tất cả các phương pháp (và dĩ nhiên không bao giờ có thể tìm được tất cả!), tuy vậy có thể giúp chúng ta định hướng tốt khi gặp các bất đẳng thức thuần nhất. Nhưng nếu gặp bất đẳng thức không thuần nhất thì sao nhỉ? Có thể bằng cách nào đó để đưa các bất đẳng thức không thuần nhất về các bất đẳng thức thuần nhất và áp dụng các phương pháp nói trên được không? Câu trả lời là có. Trong hầu hết các trường hợp, các bất đẳng thức không thuần nhất có thể đưa về bất đẳng thức thuần nhất bằng một quá trình mà ta gọi là thuần nhất hóa. Chúng ta không thể "chứng minh" một "định lý" được phát biểu kiểu như thế, nhưng có hai lý do để tin vào nó: thứ nhất, thực ra chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh được, còn các đại lượng khác bậc chỉ so sánh được trong các ràng buộc nào đó. Thứ hai, nhiều bất đẳng thức không thuần nhất đã được "tạo ra" bằng cách chuẩn hóa hoặc thay các biến số bằng các hằng số. Chỉ cần chúng ta đi ngược lại quá trình trên là sẽ tìm được nguyên dạng ban đầu.

Một ví dụ rất đơn giản cho lý luận nêu trên là từ bất đẳng thức thuần nhất $x^3+y^3+z^3 \geq x^2y+y^2z+z^2x$, bằng cách cho $z=1$, ta được bất đẳng thức không thuần nhất

$$x^3+y^3+1 \geq x^2y+y^2+x$$

**Ví dụ 11. (England 1999)**

Cho $p,q,r$ là các số thực dương thoả điều kiện $p+q+r=1$. Chứng minh

$$7(p+q+r) \leq 2+9pqr$$

**Ví dụ 12. (IMO 2000)**

Cho $a,b,c$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $abc=1$. Chứng minh

$$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\le 1$$

***Hướng dẫn.***

Đặt $a=\frac{x}{y},b=\frac{y}{z},c=\frac{z}{x}$!

**Ví dụ 13. (IMO, 1983)**

Chứng minh rằng nếu $a,b,c$ là ba cạnh của một tam giác thì

$$a^2b(a-b)+b^2c(b-c)+c^2a(c-a)\ge 0$$

***Hướng dẫn.***

Đặt $a=y+z,b=z+x,c=x+y$!

# Bài tập

Bài 1.

Cho $x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^3}{y^3}+\frac{y^3}{z^3}+\frac{z^3}{x^3}+\frac{x^3}{z^3}+\frac{z^3}{y^3}+\frac{y^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}+\frac{yz}{x^2}+\frac{zx}{y^2}+\frac{xy}{z^2}$$

Bài 2.

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương $x, y, z$

$$\frac{9}{4(x+y+z)} \geq \frac{x}{(x+y)(x+z)}+\frac{y}{(y+z)(y+x)}+\frac{z}{(z+x)(z+y)} \geq \frac{2}{x+y+z}$$

Bài 3.

Cho $x, y, z$ là các số thực dương thoả mãn điều kiện $2x+4y+7z=2xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x+y+z$$

Bài 4.

Cho $a, b, c$ là các số thực dương thoả $a^2+b^2+c^2+abc=4$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \leq 3$$

Bài 5. (IMO 1984)

Cho $x, y, z$ là các số thực không âm thoả mãn điều kiện $x+y+z=1$. Chứng minh rằng

$$0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}$$

Bài 6. (Iran, 1996)

Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

Bài 7. (VMO 1996)

Cho $a, b, c, d$ là các số thực không âm thoả mãn điều kiện

$$2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)+abc+abd+acd+bcd=16$$

Chứng minh rằng

$$3(a+b+c+d)\geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

Bài 8. (Poland 1996)

Cho $a, b, c$ là các số thực thoả mãn điều kiện $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1}\leq\frac{9}{10}$$

Bài 9. (Poland 1991)

Cho $x, y, z$ là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2+y^2+z^2=2$. Chứng minh rằng

$$x+y+z\leq 2+xyz$$

Bài 10. (IMO 2001)

Cho $a, b, c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}\geq 1$$

# PHƯƠNG PHÁP DỒN BIẾN

## I. Mở đầu.

Đặc điểm chung của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau. Có một phương pháp đánh giá trung gian cho phép ta giảm biến số của bất đẳng thức cần chứng minh. Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến.

Để chứng minh bất đẳng thức dạng $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0,$ ta chứng minh

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq f(t, t, ..., x_n)$$

Trong đó $t$ là lượng trung bình của $x_1, x_2, ...$ chẳng hạn như trung bình nhân hoặc trung bình cộng. Nếu được như vậy thì tiếp tục sang bước thứ hai của phép chứng minh là chỉ ra rằng

$$f(t, t, ..., x_n) \geq 0$$

Tất nhiên, bất đẳng thức này đã giảm số biến số đi một và thường là dễ chứng minh hơn bất đẳng thức ban đầu. Việc lựa chọn lượng trung bình nào để dồn biến tùy thuộc vào đặc thù của bài toán, và đôi khi lượng $t$ khá đặc biệt.

Thường thì, bước thứ nhất trong 2 bước chính ở trên là khó hơn cả vì thực chất ta vẫn phải làm việc với các ước lượng có ít nhất là ba biến số. Sau đây là một vài dạng dồn biến thường gặp.

## II. Phương pháp dồn biến trong đại số.

### 1. Dồn biến ba biến số.

Đây là phần đơn giản nhất của phương pháp dồn biến. Và ngược lại cũng có thể nói phương pháp dồn biến hiệu quả nhất trong trường hợp này.

**Ví dụ 1.1.**

Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh rằng

$$a+b+c \geq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

***Lời giải.***

Đặt $f(a,b,c)=a+b+c-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2$

Giả sử $a=\min\{a,b,c\}$ thì dễ thấy $a \leq 1, b^2+c^2 \geq 2 \Rightarrow b+c \geq \sqrt{2}$

Xét hiệu

$$f(a,b,c)-f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)=(b-c)^2\left(\frac{(b+c)^2}{4}-\frac{1}{b+c+\sqrt{2(b^2+c^2)}}\right)$$

$$\geq (b-c)^2\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{\sqrt{2}+2}\right) \geq 0$$

Do đó

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq f\left(a,\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}},\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}\right)\\
&= a+\sqrt{2(b^2+c^2)}-a^2(b^2+c^2)-\frac{(b^2+c^2)^2}{4}\\
&= a+\sqrt{2(3-a^2)}-a^2(3-a^2)-\frac{(3-a^2)^2}{4}\\
&= (a-1)^2\left(\frac{3(a+1)^2}{4}-\frac{3}{\sqrt{2(3-a^2)}+3-a}\right)\\
&\geq (a-1)^2\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)=0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Ví dụ 1.2.**

Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$f(a,b,c)=(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \leq 27$$

***Lời giải.***

Giả sử $a \leq b,c \Rightarrow a \leq 1, b+c \geq 2$. Xét hiệu

$$f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=$$
$$=\frac{(a^2+a+1)(b-c)^2(4-(b+c)^2-(b+c)-4bc)}{16}\le 0$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\le f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$$
$$=(a^2+a+1)\left(\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{b+c}{2}+1\right)^2$$
$$=\frac{(a-1)^2(a(a-1)(a^2-12a+48)-37a-71)}{16}+27$$
$$\le 27$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\le 27$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

**Ví dụ 1.3.**

Cho $a,b,c\in \mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$f(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\ge 0$$

***Lời giải.***

Xét hiệu

$$f(a,b,c)-f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=\frac{3}{4}.(b-c)^2\ge 0$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\ge f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)=a^2-a(b+c)+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2\ge 0$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\ge 0$$

**Nhận xét.**

Chắc ai cũng cảm thấy đây là một bất đẳng thức quá dễ, quá cơ bản và tôi nghĩ chắc cũng có người không hiểu nổi tại sao tôi lại đưa ví dụ này vào. Nhưng hãy chú ý rằng những cái hay trong những bài toán đơn giản không phải là không có và bây giờ tôi sẽ trình bày ý tưởng mà tôi cảm thấy thích thú nhất trong bài này mà mình phát hiện được (có thể không chỉ mình tôi).

Vì $f(a,b,c)$ là hàm đối xứng với các biến $a,b,c$ nên theo trên, ta có

$$\begin{aligned}
f(a,b,c) &\geq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\\
&= f\left(\frac{b+c}{2},a,\frac{b+c}{2}\right)\\
&\geq f\left(\frac{b+c}{2},\frac{2a+b+c}{4},\frac{2a+b+c}{4}\right)\\
&= \ldots \geq \ldots
\end{aligned}$$

Và ý tưởng dãy số bắt đầu xuất hiện.

Xét các dãy số $(a_n),(b_n),(c_n)$ được xác định bởi

$$a_0 = a, b_0 = b, c_0 = c$$

$$a_{2n+1} = a_{2n}, b_{2n+1} = c_{2n+1} = \frac{b_{2n}+c_{2n}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$a_{2n+2} = b_{2n+1}, b_{2n+2} = c_{2n+2} = \frac{a_{2n+1}+c_{2n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Dễ thấy

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3} = t$$

Và

$$f(a,b,c) \geq f(a_n,b_n,c_n), \forall n \in \mathrm{N}$$

Do hàm $f(a,b,c)$ liên tục nên

$$f(a,b,c) \geq f(\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n, \lim_{n\to+\infty} c_n) = f(t,t,t) = 0$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \geq 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

Cách là trên là một ý tưởng có thể nói là khá độc đáo và là cơ sở hình thành nên cách thức dồn biến bốn biến số mà chúng ta sẽ xét ngay bây giờ.

### 2. Dồn biến bốn biến số.

Khác với ba biến số dồn biến bốn biến số khó khăn và phức tạp hơn nhiều. Trong trường hợp này kiểu dồn biến thông thường mà chúng ta vẫn làm với ba biến vô tác dụng. Và ví dụ 1.3 chính là tiền đề để xây dựng nên đường lối tổng quát để giải quyết các bài bất đẳng thức có thể giải bằng dồn biến kết hợp dãy số.

**Ví dụ 2.1. (Dự tuyển IMO 1993)**

Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$abc+abd+acd+bcd \le \frac{1}{27}+\frac{176}{27}.abcd$$

***Lời giải.***

Đặt

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= abc+abd+acd+bcd-\frac{176}{27}.abcd \\ &= bc(a+d)+ad\left(b+c-\frac{176}{27}.bc\right) \\ &= ad(b+c)+bc\left(a+d-\frac{176}{27}.ad\right) \end{aligned}$$

Với mọi bộ bốn số $(a,b,c,d)$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$, nếu tồn tại hai số trong bốn số này, chẳng hạn $b,c$ thỏa mãn $b+c-\frac{176}{27}.bc \le 0$ thì

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= bc(a+d)+ad\left(b+c-\frac{176}{27}.bc\right) \\ &\le bc(a+d) \\ &\le \left(\frac{b+c+a+d}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{27} \end{aligned}$$

Do đó, không mất tính tổng quát có thể giả sử với mọi bộ bốn số $(a,b,c,d)$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$ thì hai số bất kỳ trong bộ bốn số này, chẳng hạn $a,d$, đều thỏa mãn $a+d-\frac{176}{27}.ad \ge 0$

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &= ad(b+c)+bc\left(a+d-\frac{176}{27}.ad\right) \\ &\le ad(b+c)+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2\left(a+d-\frac{176}{27}.ad\right) \end{aligned}$$

$$= f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}, d\right)$$

Xét các dãy $(b_n), (c_n), (d_n)$ được xác định bởi

$$b_0 = b,\, c_0 = c,\, d_0 = d$$

$$b_{2n+1} = d_{2n},\, c_{2n+1} = d_{2n+1} = \frac{b_{2n} + c_{2n}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

$$b_{2n+2} = c_{2n+1},\, c_{2n+2} = d_{2n+2} = \frac{b_{2n+1} + c_{2n+1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}$$

Khi đó, dễ thấy $\begin{cases} a + b_n + c_n + d_n = 1 \ \forall n \in \mathbf{N} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \lim\limits_{n\to+\infty} d_n = \dfrac{1-a}{3} \end{cases}$

Từ cách đặt, ta có $f(a,b,c,d) \le f(a, b_n, c_n, d_n), \forall n \in \mathbf{N}$

Do $f$ liên tục nên

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d) &\le f(a, \lim_{n\to+\infty} b_n, \lim_{n\to+\infty} c_n, \lim_{n\to+\infty} d_n) \\ &= f\left(a, \frac{1-a}{3}, \frac{1-a}{3}, \frac{1-a}{3}\right) \\ &= 3a\left(\frac{1-a}{3}\right)^2 + \left(\frac{1-a}{3}\right)^3 - \frac{176}{27}.a\left(\frac{1-a}{3}\right)^3 \\ &= \frac{a(4a-1)^2(11a-14)}{729} + \frac{1}{27} \\ &\le \frac{1}{27} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$.

Ngoài cách trên ta có thể làm đơn giản như sau

Ta có thể giả sử $f(a,b,c,d) \le f\left(\frac{a+d}{2}, b, c, \frac{a+d}{2}\right)$ với mọi $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn điều kiện $a+b+c+d=1$ (vì trong trường hợp ngược lại bài toán được giải quyết).

Vì tính đối xứng của hàm $f(a,b,c,d)$ ta có

$$f(a,b,c,d)\le f\left(\frac{a+d}{2},b,c,\frac{a+d}{2}\right)\le f\left(\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2},\frac{a+d}{2}\right)$$
$$\le f\left(\frac{a+d}{2},\frac{b+c}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$$
$$\le f\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{27}$$

Cách làm trên khá hay nhưng chỉ có thể áp dụng được với một số ít bài toán dạng này.

**Ví dụ 2.2.**

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$f(a,b,c,d)=a^4+b^4+c^4+d^4+\frac{148}{27}abcd\ge\frac{1}{27}$$

***Lời giải.***

Xét hiệu

$$D=f(a,b,c,d)-f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)=(a-b)^2\left(\frac{7}{8}.(a-b)^2+3ab-\frac{37}{27}.cd\right)$$

Từ đó, nếu có $ab\ge cd\Rightarrow D\ge 0\Rightarrow f(a,b,c,d)\ge f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c,d\right)$

Giả sử $a\ge b\ge c\ge d$.

Xét các dãy số $(a_n),(b_n),(c_n)$ được xác định bởi

$$a_0=a,b_0=b,c_0=c$$
$$a_{2n}=b_{2n-1},b_{2n}=c_{2n}=\frac{a_{2n-1}+c_{2n-1}}{2}\quad\forall n\in\mathbf{N}^*$$
$$a_{2n+1}=b_{2n+1}=\frac{a_{2n}+b_{2n}}{2},c_{2n+1}=c_{2n}\quad\forall n\in\mathbf{N}$$

Dễ thấy $\begin{cases}a_n+b_n+c_n+d=1 & \forall n\in\mathbf{N}\\ a_nb_n\ge c_nd & \forall n\in\mathbf{N}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}=\dfrac{1-d}{3}\end{cases}$

Và

$$f(a,b,c,d) \ge f(a_n,b_n,c_n,d) \ \ \forall n \in \mathbf{N}$$

Do $f$ liên tục nên

$$f(a,b,c,d) \le f(\lim_{n\to+\infty} a_n, \lim_{n\to+\infty} b_n, \lim_{n\to+\infty} c_n, d)$$
$$= f\left(d,\frac{1-d}{3},\frac{1-d}{3},\frac{1-d}{3}\right)$$
$$=3\left(\frac{1-d}{3}\right)^4 + d^4 + \frac{148}{27}d\left(\frac{1-d}{3}\right)^3$$
$$=\frac{d(4d-1)^2(19d+20)}{729}+\frac{1}{27}$$
$$\ge \frac{1}{27}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d)=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$.

**Ví dụ 2.3.**

Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=4$. Chứng minh rằng

$$16+2abcd \ge 3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$

***Lời giải.***

Ta có

$$16+2abcd \ge 3(ab+ac+ad+bc+bd+cd)$$
$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd \ge 16$$

Đặt $f(a,b,c,d)=3(a^2+b^2+c^2+d^2)+4abcd$

Xét hiệu

$$D = f(a,b,c,d) - f\left(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}\right) = (c-d)^2\left(\frac{3}{2}-ab\right)$$

Từ đó nhận thấy nếu $3 \ge 2ab \Rightarrow D \ge 0 \Rightarrow f(a,b,c,d) \ge f\left(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}\right)$

Đến đây có thể sử dụng dãy số như bài trước hoặc có thể làm như sau

Giả sử $a \le b \le c \le d \Rightarrow ab \le 1$

$$\Rightarrow f(a,b,c,d) \geq f\left(a,b,\frac{c+d}{2},\frac{c+d}{2}\right)$$
$$= 3(a^2+b^2)+\frac{3}{2}.(c+d)^2+ab(c+d)^2$$
$$= ((4-a-b)^2-6)ab+3(a+b)^2+\frac{3}{2}(4-a-b)^2$$
$$= (x^2-8x+10)y+\frac{9}{2}.x^2-12x+24$$
$$= g(x,y)$$

Trong đó $x=a+b, y=ab$.

Ta có $2\sqrt{y} \leq x \leq 2.$ Xét các trường hợp

+ Nếu $x^2-8x+10 \geq 0 \Rightarrow g(x,y) \geq \frac{9}{2}.x^2-12x+24 = \frac{9}{2}.\left(x-\frac{4}{3}\right)^2+16 \geq 16$

+ Nếu $x^2-8x+10<0$

$$\Rightarrow g(x,y) \geq (x^2-8x+10).\frac{x^2}{4}+\frac{9}{2}.x^2-12x+24 = \frac{(x-2)^2(x^2-4x+8)}{4}+16 \geq 16$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d)=(1,1,1,1),\left(\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3},0\right).$

**Ví du 2.4. (Vasile Cirtoaje)**

Cho $a,b,c,d \geq 0$ thỏa mãn $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Chứng minh rằng

$$(1-a)(1-b)(1-c)(1-d) \geq abcd$$

***Lời giải.***

Ta có Bổ đề sau

**Bổ đề. (China TST 2004)**

Cho $a,b,c,d \geq 0$ thỏa mãn $abcd=1$. Khi đó, ta có

$$f(a,b,c,d) = \frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2} \geq 1$$

*Chứng minh.*

Dễ thấy, nếu $x,y>0$ thỏa mãn $xy \geq 1$ thì

$$\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}\ge\frac{2}{\left(1+\sqrt{xy}\right)^2}$$

Từ đó ta có nếu $ab\ge 1$ thì $f(a,b,c,d)\ge f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c,d\right)$

Giả sử $a\ge b\ge c\ge d$ và xét các dãy số $(a_n),(b_n),(c_n)$ được xác định bởi

$$a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=c$$
$$a_{2n+1}=b_{2n+1}=\sqrt{a_{2n}b_{2n}},\ c_{2n+1}=c_{2n},\forall n\in\mathbf{N}$$
$$a_{2n+2}=b_{2n+2}=\sqrt{a_{2n+1}c_{2n+1}},\ c_{2n+2}=b_{2n+1},\forall n\in\mathbf{N}$$

Dễ thấy $\begin{cases} a_nb_nc_nd=1\ \forall n\in \mathrm{N}\\ a_nb_n\ge 1\quad \forall n\in \mathrm{N}\\ \lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=\sqrt[3]{abc}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{d}}\end{cases}$

Từ đó

$$f(a,b,c,d)\ge f(a_n,b_n,c_n,d),\ \forall n\in\mathbf{N}$$
$$\Rightarrow f(a,b,c,d)\ge f(\lim_{n\to+\infty}a_n,\lim_{n\to+\infty}b_n,\lim_{n\to+\infty}c_n,d)$$
$$=f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{d}},\frac{1}{\sqrt[3]{d}},\frac{1}{\sqrt[3]{d}},d\right)$$
$$=\frac{3\sqrt[3]{d^2}}{\left(\sqrt[3]{d}+1\right)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}$$
$$=\frac{\sqrt[3]{d^2}\left(\sqrt[3]{d}-1\right)^2\left(2\sqrt[3]{d^4}+2d+\sqrt[3]{d^2}+4\sqrt[3]{d}+3\right)}{\left(\sqrt[3]{d}+1\right)^2(1+d)^2}+1$$
$$\ge 1$$
$$\Rightarrow f(a,b,c,d)\ge 1$$

Vậy Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán, ta có $a^2+b^2+c^2+d^2=1\Rightarrow a,b,c,d\in[0,1]$

Nếu $abcd=0$ thì $(1-a)(1-b)(1-c)(1-d)\ge abcd$.

Nếu $abcd>0$.

Đặt $x=\frac{1-a}{a}, y=\frac{1-b}{b}, z=\frac{1-c}{c}, t=\frac{1-d}{d} \Rightarrow x,y,z,t>0$

Giả thiết $a^2+b^2+c^2+d^2=1 \Leftrightarrow \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}=1$

Và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$xyzt \geq 1$$

Giả sử ngược lại $xyzt<1$. Khi đó, đặt $t'=\frac{1}{xyz}$ thì $xyzt'=1$ và $t<t'$.

Áp dụng Bổ đề, ta được

$$\begin{aligned}1 &\leq \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t')^2}\\ &< \frac{1}{(1+x)^2}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+z)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}=1\end{aligned}$$

Vậy điều giả sử sai.

$$\Rightarrow xyzt \geq 1$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

**Nhận xét.**

Đây là một bài toán hay và lời giải vừa rồi đã sử dụng hai công cụ là đổi biến và dồn biến (với các biến mới). Ngoài ra có thể dồn biến trực tiếp với các biến ban đầu (dành cho mọi người).

**3. Dồn biến với nhiều biến số hơn.**

**Ví dụ 3.1.**

Cho $a,b,c,d,e \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c+d+e=5$. Chứng minh rằng

$$f(a,b,c,d,e)=4(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2)+5abcde \geq 25$$

***Lời giải.***

Xét hiệu

$$D=f(a,b,c,d,e)-f\left(a,b,c,\frac{d+e}{2},\frac{d+e}{2}\right)=(d-e)^2\left(2-\frac{5}{4}.abc\right)$$

Từ đó, ta có nếu $abc \le \frac{8}{5} \Rightarrow D \ge 0 \Rightarrow f(a,b,c,d,e) \ge f\left(a,b,c,\frac{d+e}{2},\frac{d+e}{2}\right)$.

Giả sử $a \le b \le c \le d \le e$ và xét các dãy số $(c_n),(d_n),(e_n)$ được xác định bởi

$$c_0 = c,\ d_0 = d,\ e_0 = e$$

$$c_{2n-1} = c_{2n-2},\ d_{2n-1} = e_{2n-1} = \frac{d_{2n-2}+e_{2n-2}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

$$c_{2n} = d_{2n-1},\ d_{2n} = e_{2n} = \frac{c_{2n-1}+e_{2n-1}}{2}, \forall n \in \mathbf{N}^*$$

Dễ thấy

$$a+b+c_n+d_n+e_n = 1\ \ \forall n \in$$

$$a \le b \le \min\{c_n, d_n, e_n\}\ \ \forall n \in \quad \Rightarrow abc_n \le \frac{8}{5}\ \ \forall n \in$$

Và

$$\lim_{n\to+\infty} c_n = \lim_{n\to+\infty} d_n = \lim_{n\to+\infty} e_n = \frac{c+d+e}{3} = \frac{5-a-b}{3}$$

Từ đó, ta có

$$f(a,b,c,d,e) \ge f(a,b,c_n,d_n,e_n)\ \ \forall n \in \mathbf{N}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} f(a,b,c,d,e) &\ge f(a,b,\lim_{n\to+\infty} c_n, \lim_{n\to+\infty} d_n, \lim_{n\to+\infty} e_n) \\ &= f\left(a,b,\frac{5-a-b}{3},\frac{5-a-b}{3},\frac{5-a-b}{3}\right) \\ &= 4(a^2+b^2)+\frac{4}{3}.(5-a-b)^2+\frac{5ab(5-a-b)^3}{27} \\ &= 4(a+b)^2-8ab+\frac{4}{3}.(5-a-b)^2+\frac{5ab(5-a-b)^3}{27} \\ &= \frac{5y^2(5-x)^3}{27}-8y+\frac{16x^2-40x+100}{3} \\ &= g(y) \end{aligned}$$

Trong đó $x = a+b, y = ab$.

Ta có

$$g'(y) = \frac{10y(5-x)^3}{27} - 8$$

+ Nếu $\frac{10y(5-x)^3}{27}-8\ge 0$ thì

$$g(y)\ge g(0)=\frac{16x^2-40x+100}{3}=\frac{16}{3}.\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+25\ge 25$$

+ Nếu $\frac{10y(5-x)^3}{27}-8<0$ thì

$$g(y)\ge g\left(\frac{x^2}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{5\left(\frac{x^2}{4}\right)(5-x)^3}{27}-8\right).\frac{x^2}{4}+\frac{16x^2-40x+100}{3}$$

$$=\frac{(x-2)^2(-5x^3+55x^2-135x+225)}{108}+25$$

Dễ dàng chứng minh

$$-5x^3+55x^2-135x+225\ge 0\ \ \forall x\in[0,2]$$

Do đó

$$g(y)\ge 25$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c,d,e)=(1,1,1,1,1),\left(\frac{5}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{4},\frac{5}{4},0\right)$.

**Ví dụ 3.2.**

Cho $x_1,x_2,...,x_n\ge 0$ thỏa mãn $x_1+x_2+...+x_n=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j(x_i+x_j)$$

***Lời giải.***

Ta có $f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{1\le i<j\le n}x_i^2x_j+\sum_{1\le i<j\le n}x_ix_j^2=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.\left(\sum_{j\ne i}x_j\right)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2.(1-x_i)$

Xét hiệu

$$f(x_1,...,x_i+x_j,...,0,x_n)-f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)=2x_ix_j(2-3(x_i+x_j))$$

Do đó, nếu $3(x_i+x_j)\le 2$, thì $f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)\le f(x_1,...,x_i+x_j,...,0,x_n)$.

Xét tất cả các bộ số $(x_1,x_2,...,x_n)$ sao cho $f(x_1,x_2,...,x_n)$ đạt $\max f$.

Trong đó, chọn ra bộ số $(a_1,a_2,...,a_n)$ sao cho số phần tử dương trong bộ số đó là ít nhất (luôn có thể chọn được vì số số dương là hữu hạn).

Giả sử $a_1\ge a_2\ge ...\ge a_k>0=a_{k+1}=a_{k+2}=...=a_n$.

Nếu $k\ge 3$ thì ta có

$$1=a_1+a_2+...+a_n\ge\frac{a_2+a_3}{2}+a_2+a_3=\frac{3}{2}.(a_2+a_3)\Rightarrow 3(a_2+a_3)\le 2$$

Do đó

$$f(a_1,a_2,...,a_n)\le f(a_1,a_2+a_3,0,...,a_n)\Rightarrow f(a_1,a_2+a_3,0,...,a_n)=\max f$$

Điều này vô lý do bộ số $(a_1,a_2+a_3,0,...,a_n)$ có số số dương ít hơn bộ số $(a_1,a_2,...,a_n)$.

Vậy $k\le 2$. Do đó

$$f(a_1,a_2,...,a_n)=a_1a_2(a_1+a_2)=a_1(1-a_1)\le\frac{1}{4}$$

Do đó

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\le\frac{1}{4}$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $x_1=x_2=\frac{1}{2},x_3=x_4=...=x_n$.

### 4. Các kiểu dồn biến khác.

Trong một số trường hợp, các kiểu dồn biến thông thường (đã nói ở phần mở đầu) vô tác dụng (thường do dấu bằng không phải xảy ra khi tất cả các biến bằng nhau). Vì vậy, xuất hiện một số kiểu dồn biến khác.

**Ví dụ 4.1.**

Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Tìm min của

$$f(x,y,z)=\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}$$

***Lời giải.***

Khác với những ví dụ trước, ở ví dụ này có hai điều khiến việc dồn biến khó khăn hơn là cực trị đạt được không phải khi cả ba biến bằng nhau và biểu thức điều kiện của biến hết sức khó chịu. Sau đây là một trong những lời giải cho bài này.

Giả sử $x \geq y, z$ và đặt $a = y + z$ thì $ax \leq 1$ và $2x \geq a$. Xét hiệu

$$f(x,y,z) - f\left(0, a, \frac{1}{a}\right) = \frac{(1-ax)(2x-a+a^2x)}{(1+x^2)(1+a^2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow f(x,y,z) \geq f\left(0, a, \frac{1}{a}\right) = \frac{(a-1)^2(2a^2-a+2)}{2a(1+a^2)} + \frac{5}{2} \geq \frac{5}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z) = (1,1,0)$.

Vậy

$$\min f(x,y,z) = \frac{5}{2}$$

**Ví dụ 4.2.**

Cho $a,b,c \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a,b,c) = (a^3+a+7)(b^3+b+7)(c^3+c+7)$$

***Lời giải*.**

Bằng tính toán trực tiếp (hoặc giả sử có $b = c$), ta dự đoán được $\max f = 441$ đạt được chẳng hạn khi $a = 1, b = c = 0$. Từ đó, dẫn đến lời giải như sau

Giả sử $a \leq b, c \Rightarrow b + c \geq \frac{2}{3}$.

Mặt khác, do $0 \leq a,b,c \leq 1 \Rightarrow b^2 + c^2 \leq b + c \leq 1, bc \leq 1$.

Xét hiệu

$$\begin{aligned} f(a,b,c) - f(a,b+c,0) &= (a^3+a+7)bc(b^2c^2 + 7(b^2+c^2) + 1 - 21(b+c)) \\ &\leq (a^3+a+7)bc\left(1 + 7 + 1 - 21.\frac{2}{3}\right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(a,b,c) &\leq f(a,b+c,0) \\ &= 7(a^3+a+7)((1-a)^3 + 1 - a + 7) \\ &= 7a(a-1)((1-a)(2-a^2+a^3)+19) + 441 \leq 441 \end{aligned}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(1,0,0)$.

Vậy $\max f = 441$.

## III. Dồn biến trong tam giác.

### 1. Dồn biến lượng giác trong tam giác.

Trong tam giác phương pháp dồn biến đưa bất đẳng thức đã cho ở trường hợp tam giác thường về trường hợp tam giác cân.

**Ví dụ 5.1.**

Cho tam giác $ABC$ không tù. Cgứng minh rằng

$$f(A,B,C)=\frac{\sin B.\sin C}{\sin A}+\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}+\frac{\sin A.\sin B}{\sin C}\geq\frac{5}{2}$$

***Lời giải.***

Giả sử $A\geq B,C\Rightarrow\frac{\pi}{2}\geq A\geq\frac{\pi}{3}$.

Xét hiệu

$$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=\frac{\sin^2\frac{B-C}{2}}{\sin A}.\left(\frac{4\sin^2 A.\sin^2\frac{A}{2}}{\sin B.\sin C}-1\right)$$

$$\geq\frac{\sin^2\frac{B-C}{2}}{\sin A}.\left(4\sin^2\frac{A}{2}-1\right)$$

$$\geq 0$$

$$\Rightarrow f(A,B,C)\geq f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=2\sin A+\frac{\sin^2\frac{B+C}{2}}{\sin A}=2\sin A+\frac{1}{2}\text{cotg}\frac{A}{2}$$

Đặt $t=\text{cotg}\frac{A}{2}\Rightarrow t\geq 1$.

Và

$$2\sin A+\frac{1}{2}.\text{cotg}\frac{A}{2}=\frac{4t}{t^2+1}+\frac{1}{2}.t=\frac{(t-1)(t^2-4t+5)}{2(t^2+1)}+\frac{5}{2}\geq\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow f(A,B,C)\geq\frac{5}{2}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A=\frac{\pi}{2}, B=C=\frac{\pi}{4}$ và các hoán vị tương ứng.

**Nhận xét.**

Đây là dạng lượng giác của ví dụ 4.1. Dễ thấy rằng dồn biến ở bài này dễ chịu và dễ nghĩ hơn bài kia rất nhiều.

**Ví dụ 5.2. (VMO 1993)**

Cho tam giác $ABC$. Tìm min của

$$f(A,B,C)=(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B)(1+\cos^2 C)$$

***Lời giải.***

**+ Cách 1.**

Giả sử $A\le B,C \Rightarrow A\le \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos A \ge \frac{1}{2}$

Xét hiệu

$$f(A,B,C)-f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)=$$

$$=(1+\cos^2 A).\sin^2\frac{B-C}{2}.\frac{6\cos A-\cos(B-C)-1}{2}$$

$$\ge (1+\cos^2 A).\sin^2\frac{B-C}{2}.\frac{3-1-1}{2}$$

$$\ge 0$$

$$\Rightarrow f(A,B,C)\ge f\left(A,\frac{B+C}{2},\frac{B+C}{2}\right)$$

$$=(1+\cos^2 A)\left(1+\cos^2\frac{B+C}{2}\right)^2$$

$$=\frac{(1+\cos^2 A)\left(3-\cos A\right)^2}{4}$$

$$=\frac{(2\cos A-1)^2(4(1-\cos A)(4-\cos A)+3)}{64}+\frac{125}{64}$$

$$\ge \frac{125}{64}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.

Vậy $\min f(A,B,C) = \dfrac{125}{64}$.

**+ Cách 2.**

Giả sử $A \geq B \geq C \Rightarrow C \leq \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\dfrac{C}{2} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ta có

$$\begin{aligned}(1+\cos^2 A)(1+\cos^2 B) &= (\cos A + \cos B)^2 + (1 - \cos A\cos B)^2\\ &= 4\sin^2\frac{C}{2}.\cos^2\frac{A-B}{2} + \left(\cos^2\frac{A-B}{2} - 1 - \cos^2\frac{C}{2}\right)^2\\ &= f\left(\cos^2\frac{A-B}{2}\right)\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}f'\left(\cos^2\frac{A-B}{2}\right) &= 4\sin^2\frac{C}{2} + 2\left(\cos^2\frac{A-B}{2} - 1 - \cos^2\frac{C}{2}\right)\\ &= 2\left(\cos^2\frac{A-B}{2} + 1 - 3\cos^2\frac{C}{2}\right)\\ &\leq 0\end{aligned}$$

Do đó

$$f\left(\cos^2\frac{A-B}{2}\right) \geq f(1) = \left(1 + \sin^2\frac{C}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow f(A,B,C) \geq f\left(\frac{A+B}{2}, \frac{A+B}{2}, C\right)$$

Đến đây, lập luận hoàn toàn tương tự như cách 1, ta có $\min f(A,B,C) = \dfrac{125}{64}$.

**Ví dụ 5.3.**

Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

$$\cos\frac{A-B}{2} + \cos\frac{B-C}{2} + \cos\frac{C-A}{2} \geq \frac{2}{\sqrt{3}}.(\sin A + \sin B + \sin C)$$

***Lời giải.***

Giả sử $A \le B, C \Rightarrow A \le \dfrac{\pi}{3}$. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\cos\frac{B-C}{2}+2\cos\frac{B-C}{4}.\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt{3}}.\sin A-\frac{4}{\sqrt{3}}.\cos\frac{A}{2}.\cos\frac{B-C}{2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}}.\cos\frac{A}{2}\right).\left(2\cos^2\frac{B-C}{4}-1\right)+2\cos\frac{B-C}{4}.\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt{3}}.\sin A\ge 0$$

Xét hàm số $f(x)=\left(1-\dfrac{4}{\sqrt{3}}.\cos\dfrac{A}{2}\right).(2x^2-1)+2x.\cos\dfrac{\pi-3A}{4}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\sin A$

Với $x=\cos\dfrac{B-C}{4}\Rightarrow x\in\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},1\right]$

Ta có

$$\begin{aligned}f'(x)&=4x\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}}.\cos\frac{A}{2}\right)+2\cos\frac{\pi-3A}{4}\\&\le 4x\left(1-\frac{4}{\sqrt{3}}.\cos\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\frac{\pi-3A}{4}\\&=-4x+2\cos\frac{\pi-3A}{4}\\&<-4.\frac{\sqrt{2}}{2}+2\cos\frac{\pi-3A}{4}\\&<0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x)\ge f(1)=1-\frac{4}{\sqrt{3}}.\cos\frac{A}{2}+2\cos\frac{\pi-3A}{4}-\frac{2}{\sqrt{3}}.\sin A=g(A)$$

Ta có

$$\begin{aligned}g'(A)&=-\frac{2}{\sqrt{3}}.\cos A+\frac{2}{\sqrt{3}}.\sin\frac{A}{2}+\frac{3}{2}.\sin\frac{\pi-3A}{4}\\&=\left(\sin\frac{A}{4}+\cos\frac{A}{4}\right)\left(2\sin\frac{A}{2}-1\right)\left(\frac{2}{\sqrt{3}}.\left(\sin\frac{A}{4}+\cos\frac{A}{4}\right)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\\&\le 0\,(\text{do } 0<A\le\frac{\pi}{3})\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(A)\ge g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Rightarrow f(1)\ge 0$$

$\Rightarrow f(x) \geq 0$

$\Rightarrow$ ñpcm.

**Nhận xét.** Việc sử dụng công cụ đạo hàm trong phương pháp dồn biến rất có lợi khi việc biến đổi tương đương phức tạp.

**2. Dồn biến theo các cạnh.**

**Ví dụ.**

Cho tam giác $ABC$ thỏa mãn $a \geq b, c$. Chứng minh rằng

$$l_a + m_b + m_c \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.(a+b+c)$$

***Lời giải.***

Ta coi

$$\begin{aligned} l_a + m_b + m_c &= \frac{\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{(b+c)^2 - a^2} + \frac{1}{2}.\left(\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} + \sqrt{2a^2-b^2+2c^2}\right) \\ &= f(a,b,c) \end{aligned}$$

Tröôic heit, ta chöing minh

$$\sqrt{2a^2+2b^2-c^2} + \sqrt{2a^2-b^2+2c^2} \leq 2\sqrt{2a^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \qquad (1)$$

Thait vaiy

(1) $\Leftrightarrow (b-c)^2(a+b+c)(b+c-a) \geq 0$ (hiein nhiein ñuing)

Mait khaic, ta lai coi

$$\frac{\sqrt{bc}}{b+c}.\sqrt{(b+c)^2-a^2} \leq \frac{1}{2}.\sqrt{(b+c)^2-a^2} \qquad (2)$$

Töi (1) vai (2), ta coi

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &\leq \frac{1}{2}.\sqrt{(b+c)^2-a^2} + \sqrt{2a^2 + \left(\frac{b+c}{2}\right)^2} \\ &= f\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) \qquad (3) \end{aligned}$$

Ta sei chöing minh

$$f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)\le\frac{\sqrt{3}}{2}.(a+b+c) \qquad (4)$$

Thật vậy

$$(4)\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\sqrt{(b+c)^2-a^2}+\sqrt{2a^2+\left(\frac{b+c}{2}\right)^2}\le\frac{\sqrt{3}}{2}.(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\left(\frac{b+c}{a}\right)^2-1}+\sqrt{8+\left(\frac{b+c}{a}\right)^2}\le\sqrt{3}\left(1+\frac{b+c}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-1}+\sqrt{8+x^2}\le\sqrt{3}(1+x)\ \text{(trong đó } x=\frac{b+c}{a}\Rightarrow x\in(1,2])$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^3(x+2)\le 0\ \text{(hiển nhiên đúng)}$$

Kết hợp (3) và (4), ta suy ra đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tuy đã rất cố gắng nhưng bài viết này cũng không thể vét hết các kiểu và dạng bài tập dồn biến cũng như nói về tư duy và cách thức hình thành phương pháp. Nhưng tôi nghĩ nó cũng đã đủ để các bạn hình thành nên phương pháp này trong đầu, từ đó các bạn sẽ tự cảm nhận được cái hay của phương pháp này cũng như các kiểu dồn biến khác mà bài viết này chưa đề cập đến. Chú ý rằng các lời giải trên là để phù hợp với bài viết này nên cũng có thể có những cách khác hay hơn.

## VI. Bài tập.

Bài 1. (Vietnam TST 1996)

Cho $a,b,c\in\mathbf{R}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4-\frac{4}{7}.(a^4+b^4+c^4)$$

Bài 2. (China TST 2004)

Cho $a,b,c,d>0$ thỏa mãn $abcd=1$. Chứng minh rằng

$$P=\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{1}{(1+d)^2}\ge 1$$

Bài 3.

Cho $a,b,c \geq 0$ thoa man $a+b+c=1$. Chöng minh rang

$$a^3+b^3+c^3+\frac{15}{4}.abc \geq \frac{1}{4}$$

Bài 4.

Cho $a,b,c,d \geq 0$ thoa man $a+b+c+d=4$. Chöng minh rang

$$abc+abd+acd+bcd+a^2b^2c^2+a^2b^2d^2+a^2c^2d^2+b^2c^2d^2 \leq 8$$

Bài 5. (Phạm Kim Hùng)

Cho $a,b,c \geq 0$ thoa man $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$(a^2+b)(b^2+c)(c^2+a) \leq 13+abc$$

Bài 6.

Cho $a,b,c,d \geq 0$ thoa man $a+b+c+d=4$.

a) Chứng minh rằng

$$2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) \geq abc+abd+acd+bcd+4$$

b) Tìm min của

$$P=7\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}\right)-abc+abd+acd+bcd$$

Bài 7.

Cho tam giác nhọn $ABC$. Chứng minh rằng

$$\left(\frac{\sin B.\sin C}{\sin A}\right)^2+\left(\frac{\sin C.\sin A}{\sin B}\right)^2+\left(\frac{\sin A.\sin B}{\sin C}\right)^2 \geq \frac{9}{4}$$

Bài 8.

Cho tam giác $ABC$. Chứng minh rằng

$$p \leq 2R+\left(3\sqrt{3}-4\right)r$$

Bài 9.

Cho $a,b,c,d,e \geq 0$ thỏa mãn $a+b+c+d+e=1$. Chứng minh rằng

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+\frac{1845}{256}.abcde \geq \frac{1}{256}$$

Bài 10.

Cho $a,b,c \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\left(a^2+\sqrt{a}+3\right)\left(b^2+\sqrt{b}+3\right)\left(c^2+\sqrt{c}+3\right)$$

Bài 11. (Phạm Kim Hùng)

Cho $a,b,c>0$ thỏa mãn $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a+3}{(a+1)^2}+\frac{b+3}{(b+1)^2}+\frac{c+3}{(c+1)^2}\ge 3$$

Bài 12.

Cho $x,y,z\ge 0$ thỏa mãn $xy+yz+zx=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{y+z}}+\frac{1}{\sqrt{z+x}}+\frac{1}{\sqrt{x+y}}\ge 2+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bài 13.

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$.. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\frac{1-a}{1+a}}+\sqrt{\frac{1-b}{1+b}}+\sqrt{\frac{1-c}{1+c}}\le 1+\frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bài 14.

Cho $a,b,c,d\ge 0$. Chứng minh rằng

$$3(a^4+b^4+c^4+d^4)+4abcd\ge (a+b+c+d)(a^3+b^3+c^3+d^3)$$

Bài 15. (Phạm Kim Hùng)

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$36(ab+bc+ca)\ge (a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)(a^3+b^3+c^3)$$

Bài 16. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Cho $a,b,c\ge 0$ thỏa mãn $a+b+c=1$. Tìm min

$$P=\frac{ab+bc+ca}{(a^4b^4+b^4c^4+c^4a^4)(a^4+b^4+c^4)}$$

# DỒN BIẾN KHÔNG XÁC ĐỊNH

## I. Dồn biến không xác định.

Cái tên nghe có vẻ lạ nhỉ? Để tìm hiểu phương pháp mới mẻ này chúng ta hãy cùng bàn đến hai bài toán quen thuộc sau

**Bài toán 1.**

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1, x_2 ..., x_n$ là các số thực thuộc đoạn $[p, q]$ với $p, q$ là hai số thực cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $f(x_1, x_2 ..., x_n)$

**Bài toán 2.**

Cho $n$ là số nguyên dương và là $x_1, x_2 ..., x_n$ các số thực không âm có tổng bằng $n$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(x_1, x_2 ..., x_n)$

(Ở cả hai bài trên thì $f(x_1, x_2 ..., x_n)$ đều là các biểu thức đối xứng của $x_1, x_2 ..., x_n$)

Thông thường đối với các Bài toán 1 chúng ta thường sắp thứ tự các biến và dồn giá trị của biến về hai biên để so sánh trực tiếp chúng. Chẳng hạn so sánh $f(x_1, x_2 ..., x_n)$ với $f(p, x_2 ..., x_n)$ với mục đích là đưa bài toán về trường hợp đơn giản với số lượng biến ít hơn. Còn với Bài toán 2 chắc chắn các bạn sẽ nghĩ ngay đến đánh giá $f(x_1, x_2 ..., x_n) \geq f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1 + x_2}{2}, ..., x_n\right)$ hoặc hi hữu lắm thì chúng ta có đánh giá $f(x_1, x_2 ..., x_n) \geq f(0, x_1 + x_2, ..., x_n)$. Có thể thấy những suy nghĩ như trên là vô cùng tự nhiên nhưng nói chung là khó thực hiện vì những bài có thể giải trực tiếp là tương đối đơn giản. Vì vậy chúng ta cần một bước phát triển hơn cho phương pháp này đó là dồn biến không xác định. Vậy dồn biến không xác định là gì? Tôi có thể giới thiệu luôn tư tưởng chính của phương pháp này là “Dồn các biến tự do về một trong những điểm đặc biệt mà ta chưa thể xác định rõ sẽ dồn cụ thể về điểm đặc biệt nào”. Có vẻ hơi khó hiểu phải không? Chúng ta sẽ cùng quay trở lại với 2 bài toán trên

(i) Với Bài toán 1, thay vì chứng minh $f(x_1,x_2...,x_n)\le f(p,x_2,...,x_n)$ chúng ta sẽ chứng minh

$$f(x_1,x_2...,x_n)\le \max\{f(p,x_2,...,x_n),f(q,x_2,...,x_n)\}$$

(ii) Với Bài toán 2, thay vì đánh giá đã nói ở trên chúng ta sẽ chỉ ra được

$$f(x_1,x_2...,x_n)\ge \min\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},...,x_n\right),f(0,x_1+x_2,...,x_n)\right\}$$

Đọc đến đây bạn đừng vội cười vì nó chỉ tiến bộ hơn phương pháp ban đầu một chút khi điều kiện dồn biến được nói lỏng mà trông lại có vẻ phức tạp với max, min lằng nhằng! Bạn hãy xem thử sức mạnh của tư tưởng này thông qua ví dụ quen thuộc sau đây nhưng trước hết chúng ta hãy đến với Bổ đề cơ bản

**Bổ đề 1.**

Cho $a,b,c$ là các số thực thỏa mãn $b\ge c$. Khi đó ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng

(i) $a\ge c$

(ii) $a\le b$

***Chứng minh.***

Giả sử cả hai bất đẳng thức trên đều sai ta suy ra $c>a>b\ge c$ (Mâu thuẫn).

**Hệ quả 1.**

Cho $a,b$ là các số thực. Khi đó ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau đúng

(i) $a\ge b$

(ii) $a\le b$

Các bạn đừng nên xem thường Bổ đề 1, tuy đây là một Bổ đề đơn giản theo đúng nghĩa của nó nhưng lại là một Bổ đề cực kỳ hiệu quả đấy. Sau đây là một ví dụ cho thấy điều đó

**Ví dụ 1.**

Cho $p,q$ là hai số thực dương, $n$ là số nguyên dương và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực thuộc đoạn $[p,q]$ với $p,q$ là hai số thực dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=(x_1+x_2+...+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)$$

***Lời giải.***

Đặt $S=x_2+x_3+...+x_n, T=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+...+\frac{1}{x_n}$

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\le f(p,x_2,...,x_n)$$
$$\Leftrightarrow (x_1+S)\left(\frac{1}{x_1}+T\right)\le (p+S)\left(\frac{1}{p}+T\right)$$
$$\Leftrightarrow (x_1-p)\left(T-\frac{S}{px_1}\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow T\le\frac{S}{px_1} \qquad (1)$$
$$f(x_1,x_2,...,x_n)\le f(q,x_2,...,x_n)$$
$$\Leftrightarrow (x_1+S)\left(\frac{1}{x_1}+T\right)\le (q+S)\left(\frac{1}{q}+T\right)$$
$$\Leftrightarrow (x_1-q)\left(T-\frac{S}{qx_1}\right)\le 0$$
$$\Leftrightarrow T\ge\frac{S}{qx_1} \qquad (2)$$

Do $\frac{S}{px_1}\ge\frac{S}{qx_1}$ nên theo Bổ đề 1 sẽ có ít nhất một trong hai bất đẳng thức (1), (2) đúng.

Suy ra $f(x_1,x_2...,x_n)\le \max\{f(p,x_2,...,x_n), f(q,x_2,...,x_n)\}$

Hoàn toàn tương tự ta nhận được kết quả sau

Tồn tại $y_1,y_2,...,y_n\in\{p,q\}$ sao cho $f(x_1,x_2,...,x_n)\le f(y_1,y_2,...,y_n)$

Bài toán đưa về tìm giá trị lớn nhất của $f(y_1,y_2,...,y_n)$ với $y_1,y_2,...,y_n\in\{p,q\}$.

Không quá khó khăn chúng ta tìm được

+ max $f(y_1,y_2,...,y_n)=\dfrac{n^2(p+q)^2}{4pq}$ với $n$ chẵn khi trong tập $\{y_1,y_2,...,y_n\}$ có $\dfrac{n}{2}$ số bằng $p$ và $\dfrac{n}{2}$ số còn lại bằng $q$.

+ max $f(y_1,y_2,...,y_n)=1+\dfrac{(n^2-1)(p+q)^2}{4pq}$ với $n$ lẻ khi trong tập $\{y_1,y_2,...,y_n\}$ có $\dfrac{n-1}{2}$ số bằng $p$ và $\dfrac{n+1}{2}$ số còn lại bằng $q$ hoặc ngược lại.

Từ đây chúng ta đi đến kết luận cho bài toán.

Chắc hẳn các bạn đã từng giải quyết bài toán này bằng cách sử dụng phương pháp hàm lồi cũng rất nhanh gọn nhưng có lẽ chúng ta phải công nhận với nhau rằng cách giải bằng tư tưởng dồn biến không xác định trên rất đẹp và phù hợp với trình độ của cả các bạn Trung học cơ sở. Bằng phép chứng minh tương tự, chúng ta có thể giải được bài toán sau

**Ví dụ 2.**

Cho $p,q$ là hai số thực dương, $n$ là số nguyên dương và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực thuộc đoạn $[p,q]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\frac{x_1^n+x_2^n+...+x_n^n}{x_1x_2...x_n}$$

Cả hai ví dụ trên đều đã có trên tạp chí Toán Học Và Tuổi Trẻ cùng với trường hợp $n=3, p=1, q=2$ tuy nhiên cách chứng minh theo tôi được biết rất thiếu tự nhiên và khó có khả năng giải tổng quát.

Như vậy là đối với các bài toán bất đẳng thức có biên rõ ràng như Bài toán 1 thì chúng ta đã có một lời giải hợp lý còn với Bài toán 2 thì sao? Dù các biến không nằm trong một giới hạn rõ ràng nhưng chúng ta có thể tạm hiểu được rằng với hai biến $x_1,x_2$ thì chúng luôn nằm trong $[0,x_1+x_2]$ và có những cặp điểm đặc biệt cần chú ý là $(0,x_1+x_2)$ và $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$. Để giải quyết triệt để Bài toán 2 chúng ta sẽ cụ thể hóa tư tưởng dồn biến không xác định bằng định lý sau

## II. Định lý dồn biến không xác định U.M.V (Undefined Mixing Variables).

**Định lý U.M.V.** Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng là một hằng số dương cho trước. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm liên tục, đối xứng của $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq \min\left\{ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right), f(0, x_1+x_2 ..., x_n)\right\}$$

với mọi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn điều kiện đã cho.

Khi đó, giá trị nhỏ nhất của $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là giá trị nhỏ nhất của $C_t$ $(t = 0,1,2,...,n-1)$ trong đó $C_t$ $(t = 0,1,2,...,n-1)$ là giá trị của $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ khi trong $(x_1, x_2, ..., x_n)$ có $t$ số bằng 0 và $n-t$ số còn lại bằng nhau.

***Chứng minh.***

Trước hết, ta chứng minh Bổ đề sau

**Bổ đề 2.** Cho một bộ số thực không âm $(x_1, x_2, ..., x_n)$ $(n \geq 2)$ thực hiện phép biến đổi $\Delta$ như sau

Chọn $x_i = \max(x_1, x_2, ..., x_n)$ và $x_j = \min(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Gán $x_i, x_j$ bởi $\dfrac{x_i + x_j}{2}$ nhưng vẫn giữ nguyên vị trí của chúng trong $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Khi đó sau vô hạn lần thực hiện ta được $x_1 = x_2 = ... = x_n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$.

*Chứng minh.*

Ký hiệu dãy ban đầu là $(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1)$.

Ta chứng minh bằng quy nạp.

Với $n = 2$ thì Bổ đề hiển nhiên đúng.

Giả sử bổ đề đúng với $n := n-1$ ta chứng minh nó đúng với $n := n$.

Thật vậy, giả sử ở lần thứ $k$ nào đó thực hiện phép biến đổi $\Delta$ ta sẽ nhận được bộ $(x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k)$.

Gọi $m_k = \min\{x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\}, M_k = \max\{x_1^k, x_2^k, ..., x_n^k\}$.

Dễ thấy $\{m_k\}$ là dãy không giảm bị chặn trên bởi $M_1$ nên $\exists \lim\limits_{k\to\infty} m_k = m$, còn $\{M_k\}$ là dãy không tăng bị chặn dưới bởi $m_1$ nên $\exists \lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$.

Nếu ở bước thứ $k$ nào đó thực hiện phép biến đổi $\Delta$ mà $x_1^k = m_k$ hoặc $x_1^k = M_k$ thì $x_1$ được gọi là có tham gia vào phép biến đổi $\Delta$ ở bước thứ $k$.

Gọi $u_1 < u_2 < ... < u_s$ là tất cả những lần $x_1$ tham gia phép biến đổi dưới vai trò số nhỏ nhất, còn $v_1 < v_2 < ... < v_t$ là tất cả những lần $x_1$ tham gia phép biến đổi dưới vai trò số lớn nhất.

*) Nếu $s + t < \infty$, đặt $k_0 = \max\{s,t\}$ suy ra từ bước $k_0$ trở đi thì $x_1$ sẽ không tham gia vào phép biến đổi $\Delta$ nữa. Như thế ta chỉ áp dụng phép biến đổi này cho bộ $(x_2^{k_0}, x_3^{k_0}, ..., x_n^{k_0})$.

Áp dụng giả thiết quy nạp, ta nhận được bộ

$$x_2^{k_0} = x_3^{k_0} = ... = x_n^{k_0} = \frac{x_2^{k_0} + x_3^{k_0} + ... + x_n^{k_0}}{n-1}.$$

Do $x_1$ không tham gia vào phép biến đổi $\Delta$ nào nữa nên

$$x_1^{k_0} = x_2^{k_0} = ... = x_n^{k_0} = \frac{x_2^{k_0} + x_3^{k_0} + ... + x_n^{k_0}}{n-1}$$

Từ đây ta có đpcm.

**) Nếu $s + t = \infty$. Không giảm tổng quát, giả sử $s = \infty$ suy ra $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{u_k} = m$.

**+ Trường hợp 1.** $t < \infty$

Do $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = m, \lim\limits_{k\to\infty} M_k = M$ nên theo định nghĩa giới hạn thì với mọi $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ thì

$\exists n_1$ sao cho với mọi $N > n_1$ thì $|m_N - m| < \varepsilon$

$\exists n_2$ sao cho với mọi $N > n_2$ thì $|M_N - M| < \varepsilon$

Chọn $n_3 = \max\{v_t, n_1, n_2\}$, suy ra với mọi $u_i - 1 > n_3$ thì

$|m_{u_i-1} - m| < \varepsilon, |M_{u_i-1} - M| < \varepsilon$

mà $x_1^{u_i} = \dfrac{m_{u_i-1} + M_{u_i-1}}{2}$ nên $\left| x_1^{u_i} - \dfrac{M+m}{2} \right| < \varepsilon$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} x_1^{u_i} = \frac{M+m}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} x_1^{k} = \frac{M+m}{2}$$

**+ Trường hợp 2.** $t = \infty$.

Hoàn toàn tương tự ta suy ra

$$\lim_{i\to\infty} x_1^{u_i} = \frac{M+m}{2}$$

$$\lim_{i\to\infty} x_1^{v_i} = \frac{M+m}{2}$$

Vì vậy $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^{k} = \dfrac{M+m}{2}$

Do đó trong mọi trường hợp ta đều có

$$\lim_{k\to\infty} x_1^{k} = \frac{M+m}{2}$$

Hoàn toàn tương tự ta nhận được kết quả sau $\lim\limits_{k\to\infty} x_i^{k} = \dfrac{M+m}{2}$ với mọi $i = 1,2,...,n$ nên ta có đpcm.

***Chứng minh định lý.***

Thực hiện thuật toán $\beta_t$ với $t \in \{0,1,2,...,n-1\}$ cho trường hợp tập $(x_1, x_2,..., x_n)$ đã có $t$ số $x_1 = x_2 = ... = x_t = 0$ như sau

Để cho gọn ta quy ước $f(x_1, x_2,..., x_n) = f(x_i, x_j)$ trong đó $x_i = \max\{x_1, x_2,..., x_n\}, x_j = \min\{x_1, x_2,..., x_n\}$ thỏa mãn $x_j > 0$.

Tiến hành so sánh $f(x_i, x_j)$ với $f\left(\dfrac{x_i + x_j}{2}, \dfrac{x_i + x_j}{2}\right)$ và $f(0, x_i + x_j)$.

*) Nếu $f(x_i, x_j) < f(0, x_i + x_j)$ thì $f(x_i, x_j) \ge f\left(\dfrac{x_i + x_j}{2}, \dfrac{x_i + x_j}{2}\right)$. Khi đó áp dụng thuật toán $\Delta$ cho $\{x_{t+1}, x_{t+2},..., x_n\}$. Nếu trong một bước nào đó lại có

$f(x_i, x_j) \geq f(0, x_i + x_j)$ thì chuyển sang thuật toán $\beta_{t+1}$. Nếu không có thì phép biến đổi $\Delta$ sẽ được thực hiện vô hạn lần nên $x_{t+1}^{\infty} = x_{t+2}^{\infty} = ... = x_n^{\infty}$.

**) Nếu $f(x_i, x_j) \geq f(0, x_i + x_j)$ ta chuyển trực tiếp sang thuật toán $\beta_{t+1}$.

Rõ ràng thuật toán $\beta_{n-1}$ đã là thuật toán hằng và đó là kết quả cố định.

Vì vậy định lý đã được chứng minh hoàn chỉnh.

Trong Định lý U.M.V ta có thể thay thế điều kiện tổng các biến bằng các điều kiện khác như tổng bình phương, tổng lập phương...và có cách dồn biến tương ứng thì định lý vẫn đúng và cách chứng minh không có gì khác.

**Hệ quả.** Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng là một hằng số dương cho trước. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ là một hàm liên tục, đối xứng của $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} f(x_1, x_2 ..., x_n) \geq \min\left\{ f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{x_1 + x_2}{2}, ..., x_n\right), f(0, x_1 + x_2 ..., x_n) \right\} \\ f(0, x_2, x_3, ..., x_n) \geq 0 \\ f\left(\dfrac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}, \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}, ..., \dfrac{x_1 + x_2 ... + x_n}{n}\right) \geq 0 \end{cases}$$

với mọi $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn điều kiện đã cho thì $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$.

## III. Một số ứng dụng của phương pháp dồn biến không xác định.

Để sử dụng phương pháp dồn biến không xác định rõ ràng ta phải thực hiện theo trình tự hai bước

**Bước 1.** Xác lập điều kiện dồn biến.

**Bước 2.** Giải quyết bài toán với điều kiện đã xác lập bên trên.

Hẳn nhiên Bước 2 chính là nội dung của Định lý U.M.V và đã được giải quyết một cách hoàn toàn triệt để. Do đó, phần quan trọng nhất của chúng ta cần phải làm đó là thực hiện được Bước 1. Một điều kì lạ là bước này thường được xử lý rất gọn nhẹ bằng cách sử dụng Bổ đề 1, một bổ đề gần như hiển nhiên dựa trên quan hệ thứ tự của các số trên trục số thực. Chúng ta hãy tìm hiểu rõ hơn qua các ví dụ đặc trưng sau

**Ví dụ 3. (Phát triển từ một bài IMO)**

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$.

Tìm số thực dương $k_n$ tốt nhất để bất đẳng thức sau luôn đúng

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \le 2^n + k_n.(x_1x_2...x_n - 1)$$

***Lời giải.***

Đặt $f(x_1, x_2, ..., x_n) = (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) - 2^n - k_n.(x_1x_2...x_n - 1)$

$$S = (1+x_3)(1+x_4)...(1+x_n)$$
$$T = x_3x_4...x_n$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right) \quad (3.1)$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)S - k_nx_1x_2T - \left(1+\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 S + k_n\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 T \le 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2 (k_nT - S) \le 0$$

$$\Leftrightarrow k_nT \le S \quad (3.2)$$

$$f\left((x_1, x_2, ..., x_n)\right) \le f\left((0, x_1+x_2, ..., x_n)\right) \quad (3.3)$$

$$\Leftrightarrow (1+x_1)(1+x_2)S - k_nx_1x_2T - (1+x_1+x_2)S \le 0$$

$$\Leftrightarrow k_nT \ge S \quad (3.4)$$

Từ (3.2), (3.4) ta có ngay ít nhất một trong hai bất đẳng thức (3.1), (3.3) đúng suy ra

$$f(x_1, x_2..., x_n) \le \max\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right), f(0, x_1+x_2..., x_n)\right\}$$

Theo Định lý U.M.V ta có

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max C_t \ \ (t = 0, 1, ..., n-1)$$

$$= \max\{C_0, C_1\}$$

$$= \max\left\{0, \left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1} - 2^n + k_n\right\}$$

Vì vậy để bất đẳng thức ở đề bài thỏa mãn thì

$$\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}-2^n+k_n\le 0$$

$$\Leftrightarrow k_n\le 2^n-\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}$$

Do đó giá trị tốt nhất của $k_n$ thỏa mãn đề bài là $k_n=2^n-\left(\frac{2n-1}{n-1}\right)^{n-1}$

Ví dụ 3 thực sự là một bài toán rất khó đã từng có mặt ở dạng này hay dạng khác trong các đề thi vô địch. Chắc chắn các bạn đã từng cảm nhận được biểu thức đạt giá trị tốt nhất ngoài trường hợp $n$ biến bằng nhau thì còn một trường hợp một biến bằng $0$ nhưng vẫn vô cùng tức tối vì không có cách nào ép nó về được 0. Giờ đây U.M.V đã cho bạn một hướng đi khá sáng sủa.

**Ví dụ 4. (Đinh Ngọc An)**

Cho $p\le n$ là các số nguyên dương và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{1\le i_1\le i_2\le...\le i_p\le n}(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_p})^k$$

Trong đó $k$ là số thực không nhỏ hơn 2.

***Lời giải.***

Đặt

$$A=\sum_{3\le i_1\le i_2\le...\le i_{p-2}\le n}(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{p-2}})^k$$

$$B=\sum_{3\le i_1\le i_2\le...\le i_{p-1}\le n}(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_{p-1}})^k$$

$$C=\sum_{3\le i_1\le i_2\le...\le i_p\le n}(x_{i_1}x_{i_2}...x_{i_p})^k$$

Ta sẽ chứng minh

$$f(x_1,x_2...,x_n)\le \max\left\{f\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{x_1+x_2}{2},...,x_n\right),f(0,x_1+x_2...,x_n)\right\}$$

Thật vậy

$$f(x_1, x_2..., x_n) \le f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right) \quad (4.1)$$

$$\Leftrightarrow x_1^k x_2^k A + (x_1^k + x_2^k)B - \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k} A - 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k B \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k} \ge \frac{B}{A}$$

$$f(x_1, x_2..., x_n) \le f(0, x_1 + x_2..., x_n) \quad (4.2)$$

$$\Leftrightarrow x_1^k x_2^k A + (x_1^k + x_2^k)B - (x_1+x_2)^k B \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{B}{A} \ge \frac{x_1^k x_2^k}{(x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k}$$

Để ít nhất một trong hai bất đẳng thức (4.1), (4.2) chắc chắn đúng thì

$$\frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k} \ge \frac{x_1^k x_2^k}{(x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k} - x_1^k x_2^k}{x_1^k x_2^k} \ge \frac{x_1^k + x_2^k - 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k}{(x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^{2k}}{x_1^k x_2^k} \ge \frac{(x_1+x_2)^k - 2\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^k}{(x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1+x_2)^{2k}}{2^{2k} x_1^k x_2^k} \ge \frac{(2^{k-1}-1)(x_1+x_2)^k}{2^{k-1}((x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1+x_2)^k((x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k) \ge (2^{2k} - 2^{k+1})x_1^k x_2^k$$

Điều này hiển nhiên do

$(x_1+x_2)^k \ge 2^k (x_1 x_2)^{\frac{k}{2}}$ (theo bđt AM-GM)

$(x_1+x_2)^k - x_1^k - x_2^k \ge (2^k - 2)(x_1 x_2)^{\frac{k}{2}}$ với $k \ge 2$

Vậy ta có

$$f(x_1, x_2 ..., x_n) \le \max\left\{ f\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1+x_2}{2}, ..., x_n\right), f(0, x_1+x_2 ..., x_n) \right\}$$

Vì thế theo Định lý U.M.V ta có

$$\max f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max C_t \ \ (t = 0, 1, ..., n-1)$$

$$= \max C_{n-t}^p . \left(\frac{n}{n-t}\right)^{kp} \ \ (t = 0, 1, ..., n-1)$$

$$= \max\left\{ C_n^p, C_{n-1}^p . \left(\frac{n}{n-1}\right)^{kp} \right\}$$

Với $n = 3$ ta có bài toán quen thuộc

Cho $a, b, c, k \ge 0$ thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng

$$(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k \le \max\left\{ 3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2k} \right\}$$

Bạn thấy có điều gì kì lạ không? Hình như U.M.V này chẳng thèm quan tâm đến số biến $n = 3$ hay $n$ bất kì thì cũng thế.

**Ví dụ 5. (tổng quát từ bđt Turkervici)**

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, ..., x_{2n}$ là các số thực không âm. Chứng minh rằng

$$(n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) + n x_1 x_2 ... x_{2n} \ge \sum_{1 \le i < j \le 2n} x_i^n x_j^n$$

***Lời giải.***

Bất đẳng thức đã cho tương đương với

$$(2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) + 2n x_1 x_2 ... x_{2n} \ge \left( \sum_{i=1}^{2n} x_i^n \right)^2$$

Đặt

$$f(x_1, x_2, ..., x_{2n}) = (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) + 2n x_1 x_2 ... x_{2n} - \left( \sum_{i=1}^{2n} x_i^n \right)^2$$

$$s = x_1x_2$$

$$t = \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}} \geq x_1x_2 = s$$

Ta có

$$f(x_1, x_2, ..., x_{2n}) \geq f\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, x_3, ..., x_{2n}\right) \qquad (5.1)$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1x_2...x_{2n} -$$

$$-(2n-1)\left(2\left(\frac{x_1^n + x_2^n}{2}\right)^2 + x_3^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}\right) - 2n\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}\right)^2 x_3...x_{2n} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1^n - x_2^n)^2}{2}\left((2n-1) - \frac{nx_3...x_{2n}}{t^{n-1} + t^{n-2}s + ... + s^{n-1}}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n-1}{n}.(t^{n-1} + t^{n-2}s + ... + s^{n-1}) \geq x_3...x_{2n}$$

$$f(x_1, x_2, ..., x_{2n}) \geq f\left(0, \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}, x_3, ..., x_{2n}\right) \qquad (5.2)$$

$$\Leftrightarrow (2n-1)(x_1^{2n} + x_2^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) + 2nx_1x_2...x_{2n} - (2n-1)((x_1^n + x_2^n)^2 + ... + x_{2n}^{2n}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2\left(x_3...x_{2n} - \frac{2n-1}{n}.x_1^{n-1}x_2^{n-1}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x_3...x_{2n} \geq \frac{2n-1}{n}.x_1^{n-1}x_2^{n-1}$$

Vì $\frac{2n-1}{n}.(t^{n-1} + t^{n-2}s + ... + s^{n-1}) \geq \frac{2n-1}{n}.s^{n-1} = \frac{2n-1}{n}x_1^{n-1}x_2^{n-1}$ nên theo Bổ đề 1 thì có ít nhất một trong hai bất đẳng thức (5.1), (5.2) đúng.

Vậy

$$f(x_1, x_2, ..., x_{2n}) \geq \min\left\{f\left(\sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, \sqrt[n]{\frac{x_1^n + x_2^n}{2}}, x_3, ..., x_{2n}\right), f\left(0, \sqrt[n]{x_1^n + x_2^n}, x_3, ..., x_{2n}\right)\right\}$$

Theo Bất đẳng thức Bunhiacopxki thì

$$(2n-1)(x_2^{2n} + x_3^{2n} + ... + x_{2n}^{2n}) \geq (x_2^n + x_3^n + ... + x_{2n}^n)^2$$

nên $f(0, x_2, x_3, ..., x_{2n}) \geq 0$.

Mặt khác $f(\underbrace{t,t,...,t}_{2n \text{ số } t})=0$ nên theo Hệ quả của định lý U.M.V, ta có điều phải chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x_1=x_2=...=x_{2n}$ hoặc $x_1=0, x_2=x_3=...=x_{2n}$ và các hoán vị.

Ví dụ 5 là bài toán tổng quát của Bất đẳng thức Turkervici $(n=4)$. Trên thực tế với trường hợp riêng này, bài toán đã rất khó và với trường hợp tổng quát nó đã thể hiện được gần như toàn bộ vẻ đẹp của phương pháp này... Bạn thấy không? Nó cũng "dễ thương" đấy chứ?

# Bài tập ứng dụng

Bài 1. (Đinh Ngọc An)

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực thuộc $[1, 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (x_1 + x_2 + ... + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + ... + \frac{1}{x_n}\right)^2$$

Bài 2. (Đinh Ngọc An)

Cho $a, b, c$ là các số thực không âm có tổng bằng 3, $k, m$ là các số thực thỏa mãn $k \geq 1, m \geq 0$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a,b,c) = a^{2k} + b^{2k} + c^{2k} + m[(ab)^k + (bc)^k + (ca)^k]$$

Bài 3. (Đinh Ngọc An)

Cho $p \leq n$ là các số nguyên dương và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_p \leq n} (x_{i_1} x_{i_2} ... x_{i_p})^k$$

Trong đó $k$ là số thực bất kì.

Bài 5. (Phạm Kim Hùng)

Cho $a, b, c, d$ là các số thực không âm thỏa mãn $a + b + c + d = 4$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$f(a,b,c,d) = (2 + a^2)(2 + b^2)(2 + c^2)(2 + d^2)$$

Bài 6. (Đinh Ngọc An)

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1, x_2, ..., x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$. Tìm số thực $m$ tốt nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng với mọi bộ $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thỏa mãn đề bài

$$x_1^m + x_2^m + ... + x_n^m + x_1 x_2 ... x_n \geq n + 1$$

Bài 7. (IMO Shortlist 1993)

Cho $a,b,c,d \ge 0$ thỏa mãn $a+b+c+d=1$. Chứng minh rằng

$$abc+abd+acd+bcd \le \frac{1}{27}+\frac{176}{27}.abcd$$

Bài 8. (Crux mathematicorum)

Cho $a,b,c \ge 0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}} \ge 15$$

Bài 9. (Đinh Ngọc An)

Tìm thực $k$ tốt nhất để bất đẳng thức sau đúng với mọi $a,b,c \ge 0$

$$2(a^3+b^3+c^3)+\frac{k(ab+bc+ca)}{a+b+c}+1 \ge 3(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 10. (Phạm Kim Hùng)

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2+x_1x_2...x_n\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\right)$$

Bài 11. (Vũ Đình Quý)

Cho $n$ là số nguyên dương và $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực không âm có tổng bằng $n$.

Tìm giá trị tốt nhất của số thực $k$ sao cho bất đẳng thức sau luôn đúng

$$\frac{1}{n-1+x_1}+\frac{1}{n-1+x_2}+...+\frac{1}{n-1+x_n}+kx_1x_2...x_n \le 1+k$$

# PHÖÔNG PHAP THAM SO HOA

## 1. Đặt vấn đề.

Đối với phần lớn các bất đẳng thức đại số không đối xứng với các biến thì dấu bằng trong các bất đẳng thức này xảy ra khi các giá trị các biến không bằng nhau. Trong chương trình phổ thông thì các bất đẳng thức cổ điển như Cauchy, Bunhiacopski lại được phát biểu dưới dạng đối xứng, dấu đẳng thức xảy ra khi các biến bằng nhau hoặc tỉ lệ. Việc áp dụng các bất đẳng thức cổ điển trên để giải các bài toán cực trị không đối xứng cần được quan tâm một cách thích đáng. Qua bài viết này, tôi muốn nêu một phương pháp giải bài toán cực trị không đối xứng bằng cách sử dụng các bất đẳng thức cổ điển thông dụng gọi là phương pháp tham số hóa.

Nội dung chủ yếu của phương pháp này như sau: từ việc phân tích tính không đối xứng của các biến có trong bài toán cực trị, thường được cho dưới các dạng:

Dạng 1. Hệ số các biến trong biểu thức cần tìm cực trị là không bằng nhau.

Dạng 2. Các biến thuộc các miền khác nhau của tập số thực.

Dạng 3. Điều kiện ràng buộc của các biến trong giả thiết bài toán là không đối xứng với các biến.

Ta đưa thêm bào các tham số phụ cần thiết thường là các hệ số hoặc lũy thừa của các biến có trong các đánh giá trung gian, sau đó chọn các tham số phụ để tất cả các dấu đẳng thức xảy ra, từ đó nhận được 1 hệ phương trình mà ẩn là các biến và các tham số phụ, tham số phụ được chọn hợp lí chỉ khi hệ phương trình tương ứng có nghiệm. Trong bài viết này tôi nêu một lớp bài toán cực trị không đối xứng thường gặp, tác giả nghĩ rằng những mô hình cụ thể này thật có ý nghĩa vì với kết quả của các bài toán này sẽ cho ta một lớp bài toán cực trị không đối xứng cụ thể miễn là xây dựng được bộ biến thỏa mãn điều kiện ràng buộc tương ứng.

## 2. Một số bài toán điển hình.

### Bài toán 1.

Cho $x, y, z$ là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xy + yz + zx = 1$ và cho $a$ là số thực dương không đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = a(x^2 + y^2) + z^2.$$

***Lời giải.***

*Phân tích*. Điều kiện ràng buộc đối xứng với $x, y, z$.

Biểu thức $P$ đối xứng với $x, y$, vai trò của $z$ trong biểu thức $P$ là không đối xứng với $x, y$.

Do vậy, ta có thể nghĩ rằng điểm cực trị sẽ đạt được khi $x = y$, và $\dfrac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2$.

Từ phân tích trên, ta có thể trình bày lời giải của bài toán như sau

Với $\alpha > 0$ (chọn sau), áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 2 số dương, ta có

$$\alpha x^2 + \frac{z^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xz$$

$$\alpha y^2 + \frac{z^2}{2} \ge 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}yz$$

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}}\left(x^2 + y^2\right) \ge 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}xy$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên ta nhận được

$$\left(\alpha + \sqrt{\frac{\alpha}{2}}\right)(x^2 + y^2) + z^2 \ge 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}(xy + yz + zx) = 2\sqrt{\frac{\alpha}{2}}$$

Chọn $\alpha$ sao cho $\alpha + \sqrt{\dfrac{\alpha}{2}} = a.$

hay

$$\sqrt{\frac{\alpha}{2}} = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{4}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} \dfrac{z^2}{2} = \alpha x^2 = \alpha y^2 \\ xy + yz + zx = 1 \end{cases}$ hay $\begin{cases} x = y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1 + 8a}} \\ z = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2\sqrt[4]{1 + 8a}} \end{cases}$

Kết luận

$$\min P = \frac{-1 + \sqrt{1 + 8a}}{2}.$$

**Bài toán 2.**

Cho $a,b,c$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $ab+bc+ca=1$ và $u,v$ là các số dương cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=ua^2+vb^2+c^2.$$

***Lời giải.***

Một cách tự nhiên từ lời giải của Bài toán 1, ta phân tích

$$u=x+y, v=z+t, 1=m+n$$

trong đó $x,y,z,t,m,n$ là các số dương sẽ chọn sau.

Áp dụng bất đẳng AM-GM cho 2 số dương, ta có

$$xa^2+tb^2\geq 2\sqrt{xt}ab,$$
$$ya^2+nc^2\geq 2\sqrt{yn}ca,$$
$$zb^2+mc^2\geq 2\sqrt{zm}bc.$$

Cộng vế các bất đẳng thức trên, ta nhận được

$$P\geq 2\sqrt{xt}ab+2\sqrt{yn}ca+2\sqrt{zm}bc.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} xa^2=tb^2 \\ ya^2=nc^2 \\ zb^2=mc^2 \end{cases}$

hay

$$\begin{cases} \dfrac{x}{t}=\dfrac{b^2}{a^2} \\ \dfrac{n}{y}=\dfrac{a^2}{c^2} \\ \dfrac{z}{m}=\dfrac{c^2}{b^2} \end{cases} \Rightarrow xzn=ytm. \qquad (1)$$

Chọn $x,y,z,t,m,n$ sao cho $xt=yn=zm=k^2$ thỏa mãn (1).

Ta có

$$(1)\Leftrightarrow (x+y)(z+t)(m+n)=uv$$

$$\Leftrightarrow (xz+xt+yz+yt)(m+n)=uv$$
$$\Leftrightarrow xzm+xtm+yzm+ytm+xzn+xtn+yzn+ytn=uv$$
$$\Leftrightarrow (x+y+m+n+z+t)k^2+2xzn=uv$$
$$\Leftrightarrow (u+v+1)k^2+2xzn=uv$$

Mà $(xzn)(utm)=k^6$ nên $xzn=k^3$.

Do đó

$$2k^3+(u+v+1)k^2-uv=0 \qquad (2)$$

Rõ ràng (2) có nghiệm dương duy nhất $k_0$.

Vậy $\min P=2k_0$ với $k_0$ là nghiệm dương duy nhất của phương trình (2).

**Nhận xét.**

Bài toán 1 và Bài toán 2 thực sự có ý nghĩa khi ta chọn $x,y,z$ hoặc $a,b,c$ là các biến đặc biệt, miễn là điều kiện ràng buộc của các biến được thỏa mãn. Chẳng hạn, khi ta chọn mô hình là tam giác $ABC$.

Nếu đặt $x=\operatorname{tg}\frac{A}{2}, y=\operatorname{tg}\frac{B}{2}, z=\operatorname{tg}\frac{C}{2}$, ta sẽ có $xy+yz+zx=1$, áp dụng vào mô hình Bài toán 1 hoặc Bài toán 2 ta sẽ thu được một lớp các bài toán cực trị dạng không đối xứng trong tam giác.

Hoặc là $x=\operatorname{cotg}A, y=\operatorname{cotg}B, z=\operatorname{cotg}C$, ta cũng sẽ có ràng buộc $xy+yz+zx=1$, tương tự ta cũng sẽ có một lớp các bài toán cực trị không đối xứng khác đối với tam giác.

Nói chung, tư tưởng chính của Bài toán 1 và Bài toán 2 là muốn xây dựng một lớp các bài toán mới ta chỉ cần xây dựng một lớp các biến đại số, hoặc lượng giác thỏa mãn điều kiện ràng buộc tương ứng. Thiết nghĩ rằng từ tư tưởng này có thể xây dựng được rất nhiều lớp bài toán như thế.

**Bài toán 3.**

Cho $x_1,x_2,...,x_n$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $x_1+x_2+...+x_n=0$ và $|x_1|+|x_2|+...+|x_n|=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\prod_{1\le i<j\le n}|x_i-x_j|.$$

***Lời giải*.**

+ Trường hợp 1. $n=2$ là trường hợp tầm thường vì lúc này $P = 1$ không đổi,

+ Trường hợp 2. $n=3$, không mất tính tổng quát ta giả sử $x_1 \le x_2 \le x_3$.

Áp dụng bất đẳngthức AM-GM cho 3 số không âm, ta có

$$\frac{P}{2}=(x_2-x_1)\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)(x_3-x_2)$$

$$\le\left(\frac{(x_2-x_1)+\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)+(x_3-x_2)}{3}\right)^3$$

$$=\left(\frac{x_3-x_1}{2}\right)^3$$

$$\le\frac{1}{8}$$

Do đó $P\le\frac{1}{4}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0\\ |x_3-x_1|=|x_1|+|x_2|+|x_3|=1\\ x_2-x_1=\dfrac{x_3-x_1}{2}=x_3-x_2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-\dfrac{1}{2}\\ x_2=0\\ x_3=\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy

$$\max P=\frac{1}{4}.$$

+ Trường hợp 3. $n=4$, một cách tự nhiên ta dự đoán rằng $\max P$ đạt được khi

$$\begin{cases}x_1=-x_4\\ x_2=-x_3\end{cases}$$

Với giả thiết $x_1\le x_2\le x_3\le x_4$.

Như vậy thì $x_2-x_1=x_4-x_3$.

Nếu xem hiệu $x_2-x_1=x_4-x_3$ là đơn vị và đặt $x_3-x_2=a$, thì ta sẽ có bộ biến mà biểu thức $P$ đạt max cần thỏa mãn điều kiện

$$x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_4 - x_2}{a+1} = \frac{x_4 - x_1}{a+2}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 4$ sẽ như sau

Với giả thiết $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4$, ta có

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_3 - x_2)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)$$

Do đó

$$\frac{P}{a(a+2)(a+1)^2} =$$

$$= (x_2 - x_1).\frac{(x_3 - x_1)}{a+1}.\frac{(x_4 - x_1)}{a+2}.\frac{(x_3 - x_2)}{a}.\frac{(x_4 - x_2)}{a+1}.(x_4 - x_3)$$

$$\le \left( \frac{(x_2 - x_1) + \frac{(x_3 - x_1)}{a+1} + \frac{(x_4 - x_1)}{a+2} + \frac{(x_3 - x_2)}{a} + \frac{(x_4 - x_2)}{a+1} + (x_4 - x_3)}{6} \right)^6$$

$$= \left( \frac{(x_4 - x_1)\left(1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2}\right) + \left(-1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}\right)(x_3 - x_2)}{6} \right)^6$$

Ta chọn $a > 0$ sao cho

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} = -1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}$$

hay $a = \sqrt{2} - 1$. Khi đó,

$$1 + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} = -1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

và ta thu được

$$\frac{P}{\left(\sqrt{2} - 1\right)\left(\sqrt{2} + 1\right)\left(\sqrt{2}\right)^2} \le \left( \frac{\frac{3\sqrt{2}}{2}.(-x_1 - x_2 + x_3 + x_4)}{6} \right)^6 \le \frac{1}{2^9}$$

hay $P \le \frac{1}{2^8}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ |-x_1 - x_2 + x_3 + x_4| = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 1 \\ x_2 - x_1 = x_4 - x_3 = \dfrac{x_3 - x_2}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{x_3 - x_1}{\sqrt{2}} = \dfrac{x_4 - x_2}{\sqrt{2}} = \dfrac{x_4 - x_1}{\sqrt{2}+1} \geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\begin{cases} x_4 = -x_1 = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ x_3 = -x_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

Kết luận

$$maxP = \frac{1}{2^8}.$$

+ Trường hợp 4. $n = 5$.

*Phân tích.*

Với giả thiết $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, từ lời giải của các trường hợp 2 và 3, một cách tự nhiên, ta nghĩ ngay rằng bộ số để $P$ đạt max là $x_5 = -x_1, x_4 = -x_2, x_3 = 0$.

Do vậy $x_5 - x_4 = x_2 - x_1, x_3 - x_2 = x_4 - x_3$, từ đó ta có thể đoán nhận rằng nếu xem hiệu $x_2 - x_1$ bằng đơn vị và $x_3 - x_2$ bằng $a$ thì bộ số để $P$ đạt max cần phải thỏa điều kiện

$$\frac{x_2 - x_1}{1} = \frac{x_4 - x_3}{a} = \frac{x_3 - x_2}{a} = \frac{x_3 - x_1}{a+1} = \frac{x_5 - x_3}{a+1} =$$
$$= \frac{x_4 - x_2}{2a} = \frac{x_5 - x_2}{2a+1} = \frac{x_4 - x_1}{2a+1} = \frac{x_5 - x_1}{2a+2} = \frac{x_5 - x_4}{1}$$

Từ cách phân tích trên, lời giải của bài toán trong trường hợp $n = 5$ sẽ như sau

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$, từ đó suy ra

$$P = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1)(x_5 - x_1)(x_3 - x_2) \text{x}$$
$$\text{x} (x_4 - x_2)(x_5 - x_2)(x_4 - x_3)(x_5 - x_3)(x_5 - x_4)$$

Xét biểu thức

$$Q = \frac{P}{4a^2(a+1)^3(2a+1)^2}$$

Viết $Q$ dưới dạng

$$Q=\frac{(x_2-x_1)}{1}.\frac{(x_3-x_1)}{a+1}.\frac{(x_4-x_1)}{2a+1}.\frac{(x_5-x_1)}{2a+2}.\frac{(x_3-x_2)}{a}\text{ x}$$
$$\text{x}\frac{(x_4-x_2)}{2a}.\frac{(x_5-x_2)}{2a+1}.\frac{(x_4-x_3)}{a}.\frac{(x_5-x_3)}{a+1}.\frac{(x_5-x_4)}{1}$$

Áp dụng bất đẳngthức AM–GM cho 10 số không âm, ta có

$$Q\le\frac{1}{10^{10}}\left(\frac{(x_2-x_1)}{1}+\frac{(x_3-x_1)}{a+1}+\frac{(x_4-x_1)}{2a+1}+\frac{(x_5-x_1)}{2a+2}+\frac{(x_3-x_2)}{a}+\right.$$
$$\left.+\frac{(x_4-x_2)}{2a}+\frac{(x_5-x_2)}{2a+1}+\frac{(x_4-x_3)}{a}+\frac{(x_5-x_3)}{a+1}+\frac{(x_5-x_4)}{1}\right)^{10}$$
$$=\frac{1}{10^{10}}\left((x_5-x_1)\left(1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2(a+1)}\right)+(x_4-x_2)\left(-1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2a}\right)\right)^{10}$$

Chọn $a>0$ sao cho

$$1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2(a+1)}=-1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2a}$$

hay $a=\frac{1}{2}$. Khi đó,

$$\begin{cases}1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2(a+1)}=-1+\frac{1}{2a+1}+\frac{3}{2a}=\frac{5}{2}\\ Q=\frac{4P}{27}\end{cases}$$

Từ đây, ta thu được

$$Q\le\frac{1}{10^{10}}.\left(\frac{5}{2}.(-x_1-x_2+x_4+x_5)\right)^{10}\le\frac{1}{2^{20}}$$

Do đó $P\le\frac{27}{2^{22}}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ |-x_1-x_2+x_4+x_5|=|x_1|+|x_2|+|x_3|+|x_4|+|x_5|=1 \\ x_2-x_1=\dfrac{2(x_3-x_1)}{3}=\dfrac{x_4-x_1}{2}=\dfrac{x_5-x_1}{3}=2(x_3-x_2)= \\ =x_4-x_2=\dfrac{x_5-x_2}{2}=2(x_4-x_3)=\dfrac{2(x_5-x_3)}{3}=x_5-x_4\geq 0 \end{cases}$$

Giải hệ phương trình này ta nhận được $\begin{cases} x_1=-x_5=-\dfrac{3}{8} \\ x_2=-x_4=-\dfrac{1}{8} \\ x_3=0 \end{cases}$.

Kết luận

$$\max P=\frac{27}{2^{22}}.$$

**Nhận xét.**

Bằng phương pháp tương tự sẽ tìm được lời giải của bài toán với $n\geq 6$.

**Bài toán 4. (Võ Quốc Bá Cẩn)**

Cho $m,n,p$ là độ dài ba cạnh của một tam giác cho trước và tam giác $ABC$ nhọn. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\text{tg}^m A.\text{tg}^n B.\text{tg}^p C.$$

***Lời giải.***

Xét biểu thức

$$Q=\frac{1}{P}=\text{cotg}^m A.\text{cotg}^n B.\text{cotg}^p C.$$

Bài toán đã cho tương đương với tìm max của $Q$.

Khi nhìn thấy biểu thức $Q$, ít nhiều ta cũng nghĩ đến đẳng thức quen thuộc

$$\text{cotg}A.\text{cotg}B+\text{cotg}B.\text{cotg}C+\text{cotg}C.\text{cotg}A=1$$

Và từ đây, ta nghĩ ngay rằng bài này có thể dùng bất đẳng AM-GM suy rộng, do đó ta đưa vào các tham số dương $x,y,z$ (chọn sau) sao cho

$$Q = (\text{cotg}A.\text{cotg}B)^x.(\text{cotg}B.\text{cotg}C)^y.(\text{cotg}C.\text{cotg}A)^z$$
$$= (\text{cotg}A)^{x+z}.(\text{cotg}B)^{x+y}.(\text{cotg}C)^{y+z}.$$

Ta phải chọn $x, y, z$ sao cho

$$\begin{cases} x+z=m \\ x+y=n \\ y+z=p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{2}.(m+n-p) \\ y=\dfrac{1}{2}.(-m+n+p) \\ z=\dfrac{1}{2}.(m-n+p) \end{cases}.$$

Từ đây, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z} = \left(\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x}\right)^x.\left(\frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y}\right)^y.\left(\frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}\right)^z$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy suy rộng, ta có

$$\frac{Q}{x^x y^y z^z} \le$$
$$\le \frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}}.\left(x\left(\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x}\right)+y\left(\frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y}\right)+z\left(\frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}\right)\right)^{x+y+z}$$
$$= \frac{1}{(x+y+z)^{x+y+z}}$$

Do đó $Q \le \dfrac{x^x y^y z^z}{(x+y+z)^{x+y+z}}$

Suy ra

$$P \ge \frac{(x+y+z)^{x+y+z}}{x^x y^y z^z} = \sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p}(m-n+p)^{m-n+p}(m+n-p)^{m+n-p}}}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\frac{\text{cotg}A.\text{cotg}B}{x} = \frac{\text{cotg}B.\text{cotg}C}{y} = \frac{\text{cotg}C.\text{cotg}A}{z}.$$

Hay

$$\begin{cases} \operatorname{cotg} A = \sqrt{\dfrac{xz}{y(x+y+z)}} = \sqrt{\dfrac{(m-n+p)(m+n-p)}{(-m+n+p)(m+n+p)}} \\ \operatorname{cotg} B = \sqrt{\dfrac{xy}{z(x+y+z)}} = \sqrt{\dfrac{(-m+n+p)(m+n-p)}{(m-n+p)(m+n+p)}} \\ \operatorname{cotg} C = \sqrt{\dfrac{yz}{x(x+y+z)}} = \sqrt{\dfrac{(m-n+p)(-m+n+p)}{(m+n-p)(m+n+p)}} \end{cases}$$

Kết luận

$$\min P = \sqrt{\frac{(m+n+p)^{m+n+p}}{(-m+n+p)^{-m+n+p}(m-n+p)^{m-n+p}(m+n-p)^{m+n-p}}}.$$

**Bài toán 5. (Vietnam TST 2001)**

Cho $a,b,c>0$ và $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}.$$

***Lời giải.***

*Phân tích.* Để đơn giản, ta sẽ đặt $x=\dfrac{1}{a}, y=\dfrac{2}{b}, z=\dfrac{3}{c}$ thì ta nhận được một bài toán tương đương như sau

“ $x,y,z>0$ và $6x+12y+21z\le 6xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x+y+z.”$$

Nhận thấy từ giả thiết $6x+12y+21z\le 6xyz$, ta có thể suy ra được

$$x^m y^n z^p \ge k \ (m,n,p>0)$$

Do đó ta nghĩ ngay rằng bài này có thể sử dụng bất đẳng AM-GM suy rộng được.

Thật vậy

$$P = m.\frac{x}{m}+n\frac{y}{n}+p.\frac{z}{p}$$

$$\ge (m+n+p)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^m.\left(\frac{y}{n}\right)^n.\left(\frac{z}{p}\right)^p\right)^{\frac{1}{m+n+p}}$$

$$\geq (m+n+p)\left(\frac{k}{m^m n^n p^p}\right)^{\frac{1}{m+n+p}}$$

Như vậy, nhiệm vụ của ta bây giờ chỉ là phải tìm $m, n, p$ nữa thôi.

Rõ ràng, ta chỉ cần xét $m+n+p=1$ là đủ. Khi đó, ta có

$$6xyz \geq 6x+12y+21z$$

$$=6m.\frac{x}{m}+12n.\frac{y}{n}+21p.\frac{z}{p}$$

$$\geq (6m+12n+21p)\left(\left(\frac{x}{m}\right)^{6m}.\left(\frac{y}{n}\right)^{12n}.\left(\frac{z}{p}\right)^{21p}\right)^{\frac{1}{6m+12n+21p}}$$

Để tìm $m, n, p$ ta cần phải giải hệ sau $\begin{cases}1-\dfrac{6m}{6m+12n+21p}=km\\ 1-\dfrac{12n}{6m+12n+21p}=kn\\ 1-\dfrac{21p}{6m+12n+21p}=kp\\ m+n+p=1\end{cases}$

Hay

$$\begin{cases}1-\dfrac{6m}{6m+12n+21p}=2m\\ 1-\dfrac{12n}{6m+12n+21p}=2n\\ 1-\dfrac{21p}{6m+12n+21p}=2p\\ m+n+p=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=1-n-p\\ 4n^2+10np+6n-5p=2\\ 5p^2+2np-n+3p=1\end{cases}$$

Xét hệ $(*)\begin{cases}4n^2+10np+6n-5p=2\\ 5p^2+2np-n+3p=1\end{cases}$

Đặt $n=tp$ $(t>0)$, hệ (*) trở thành $\begin{cases}(2t+5)p^2+(3-t)p=1 & (1)\\ (4t^2+10t)p^2+(6t-5)p=2 & (2)\end{cases}$

Lấy $(2)-2\text{x}(1)$, ta được

$$p((4t^2+6t-10)p+8t-11)=0$$

Nếu $t=1$ thì hệ (*) vô nghiệm, do đó $t \neq 1$.

$$\Rightarrow p=\frac{11-8t}{4t^2+6t-10} \qquad (3)$$

Do $p>0, t>0$ nên $1<t<\frac{11}{8}$. Thay (3) vào (1) và thu gọn, ta được

$$16t^4-12t^3-146t^2+30t+175=0$$
$$\Leftrightarrow (4t-5)(2t+5)(2t^2-4t-7)=0$$
$$\Leftrightarrow t=\frac{5}{4} \text{ (do } 1<t<\frac{11}{8})$$

Từ đó, ta có $\begin{cases} m=\frac{2}{5} \\ n=\frac{1}{3} \\ p=\frac{4}{15} \end{cases}$. Thử lại, ta thấy thỏa.

Đẳng thức ở trên xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p} \\ 6x+12y+21z=5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5x}{2}=3y=\frac{15z}{4} \\ 6x+12y+21z=5xyz \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{5}{2} \\ z=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=\frac{4}{5} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$$

Từ các phân tích và chọn tham số trên, ta đi đến một lời giải cực kỳ đơn giản như sau

Đặt $a=\frac{1}{3x}, b=\frac{4}{5y}, c=\frac{3}{2z}$, bài toán chuyển về

"$x,y,z>0$ và $3x+5y+7z\le 15xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=\frac{1}{2}.(6x+5y+4z).\text{"}$$

Áp dụng bất đẳng AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$\begin{aligned}&15xyz\ge 3x+5y+7z\ge 15\sqrt[15]{x^3y^5z^7}\\&\Rightarrow \sqrt[15]{x^{12}y^{10}z^8}\ge 1\\&\Leftrightarrow \sqrt[15]{x^6y^5z^4}\ge 1\end{aligned}$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$P=\frac{1}{2}.(6x+5y+4z)\ge \frac{15}{2}.\sqrt[15]{x^6y^5z^4}\ge \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}x=y=z\\15xyz=3x+5y+7z\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z=1\Leftrightarrow \begin{cases}a=\frac{1}{3}\\b=\frac{4}{5}\\c=\frac{3}{2}\end{cases}.$

Kết luận

$$\min P=\frac{15}{2}.$$

**Bài toán 6.**

Cho $x,y,z\ge 0$ và $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=x^4+2y^4+3z^4$$

***Lời giải.***

Với mọi số dương $a,b,c$, theo bất đẳng thức Holder, ta có

$$P(a^4+2b^4+3c^4)^3\ge (a^3x+2b^3y+3c^3z)^4$$

Chọn $a,b,c$ sao cho $a^3=2b^3=3c^3=k^3$, khi đó, ta có

$$P\ge \frac{k^{12}(x+y+z)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}=\frac{(3k^3)^4}{(a^4+2b^4+3c^4)^3}$$

Để đẳng thức xảy ra thì ta phải có

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=\frac{x+y+z}{a+b+c}=1$$

Do vậy, ta có

$$\begin{cases} a+b+c=3 \\ a^3=2b^3=3c^3=k^3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=k \\ b=\sqrt[3]{2}k \\ c=\sqrt[3]{3}k \\ k=\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} \end{cases}$$

Từ đây, ta dễ dàng suy ra kết quả của bài toán.

**Bài toán 7.**

Chứng minh rằng với mọi số dương $a_1,a_2,...,a_n$ ta luôn có

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+...+\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}\right)$$

***Chứng minh.***

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$(a_1+a_2+...+a_k)\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+...+\frac{x_k^2}{a_k}\right)\ge (x_1+x_2+...+x_k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{k}{a_1+a_2+...+a_k}\le \frac{k}{(x_1+x_2+...+x_k)^2}.\left(\frac{x_1^2}{a_1}+\frac{x_2^2}{a_2}+...+\frac{x_k^2}{a_k}\right)$$

Cố định các số $x_1,x_2,...,x_n$ và cho $k$ chạy từ 1 đến $n$, rồi lấy tổng, ta được

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+...+\frac{n}{a_1+a_2+...+a_n}\le \frac{c_1}{a_1}+\frac{c_2}{a_2}+...+\frac{c_n}{a_n}$$

Trong đó

$$c_k=\frac{kx_k^2}{(x_1+x_2+...+x_k)^2}+\frac{(k+1)x_k^2}{(x_1+x_2+...+x_{k+1})^2}+...+\frac{nx_k^2}{(x_1+x_2+...+x_n)^2}$$

Ta có thể chọn $x_k=k\ \ \forall k=\overline{1,n},$ khi đó

$$\begin{aligned}
c_k&=k^2\left(\frac{k}{(1+2+...+k)^2}+\frac{k+1}{(1+2+...+(k+1))^2}+...+\frac{n}{(1+2+...+n)^2}\right)\\
&=4k^2\left(\frac{k}{k^2(k+1)^2}+\frac{k+1}{(k+1)^2(k+2)^2}+...+\frac{n}{n^2(n+1)^2}\right)\\
&=4k^2\left(\frac{1}{k(k+1)^2}+\frac{1}{(k+1)(k+2)^2}+...+\frac{1}{n(n+1)^2}\right)\\
&=4k^2\left(\frac{1}{k+1}.\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\frac{1}{k+2}.\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+...+\frac{1}{n+1}.\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)\\
&=4k^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(k+1)^2}-\frac{1}{(k+2)^2}-...-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&<4k^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}-...-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)\\
&=4k^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&<4k^2\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&<\frac{4k}{k+1}\\
&<4
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

**Bài toán 8.**

Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực $x_1,x_2,...,x_n$

$$x_1^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+...+\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}\right)^2\le 4(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)$$

***Chứng minh.***

Với mọi số dương $c_1,c_2,...,c_n$ tùy ý, ta có

$$\left(\frac{x_1^2}{c_1}+\frac{x_2^2}{c_2}+\ldots+\frac{x_k^2}{c_k}\right)(c_1+c_2+\ldots+c_k)\ge (x_1+x_2+\ldots+x_k)^2$$

Do đó

$$\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_k}{k}\right)^2\le \frac{c_1+c_2+\ldots+c_k}{k^2c_1}.x_1^2+\frac{c_1+c_2+\ldots+c_k}{k^2c_k}.x_2^2+$$

$$+\ldots+\frac{c_1+c_2+\ldots+c_k}{k^2c_k}.x_k^2$$

Cho $k$ chạy từ 1 đến $n$, rồi lấy tổng, ta được

$$x_1^2+\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^2\le \alpha_1x_1^2+\alpha_2x_2^2+\ldots+\alpha_nx_n^2$$

Trong đó

$$\alpha_k=\frac{c_1+c_2+\ldots+c_k}{k^2c_k}+\frac{c_1+c_2+\ldots+c_{k+1}}{(k+1)^2c_k}+\ldots+\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n^2c_k}\quad \forall k=\overline{1,n}$$

Ta chọn $c_k=\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\Rightarrow c_1+c_2+\ldots+c_k=\sqrt{k}$

$$\Rightarrow \alpha_k=\frac{1}{c_k}.\left(\frac{1}{k^{3/2}}+\frac{1}{(k+1)^{3/2}}+\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Chú ý rằng

$$\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{k+\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt{k+\frac{1}{2}}-\sqrt{k-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{k+\frac{1}{2}}+\sqrt{k-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{\left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)}}$$

$$\ge\frac{1}{2k^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}\ge\frac{1}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}}-\frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}}\ge\frac{1}{2k^{3/2}}+\frac{1}{2(k+1)^{3/2}}+\ldots+\frac{1}{2n^{3/2}}$$

$$\Rightarrow \alpha_k \le \frac{2}{c_k\sqrt{k-\frac{1}{2}}} = \frac{2\left(\sqrt{k}+\sqrt{k-1}\right)}{\sqrt{k-\frac{1}{2}}} \le 4$$

Bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

**3. Bài tập đề nghị.**

Bài 1. (Vietnam TST 1994)

Cho $a,b,c,d$ là các số thực thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{2} \le a^2+b^2+c^2+d^2 \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a-2b+c)^2+(b-2c+d)^2+(b-2a)^2+(c-2d)^2$$

Bài 2.

Cho $x,y>0$ và $x+y \ge 4$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=2x+3y+\frac{6}{x}+\frac{10}{y}$$

Bài 3.

Cho $a,b,c>0$ và $a+2b+3c \ge 20$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P=a+b+c+\frac{3}{a}+\frac{9}{2b}+\frac{4}{c}$$

Bài 4.

Cho $a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=2ab+4bc+3ca$$

Bài 5. (Toán Học Tuổi Trẻ 2005)

a) Cho tam giác $ABC$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sin A.\sin^2 B.\sin^3 C$$

b) Cho tam giác $ABC$, $m,n,p$ là các số thực dương cho trước. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=\sin^m A.\sin^n B.\sin^p C$$

Bài 6. (VMEO 2004)

Cho tam giác nhọn $ABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = tgA + 2tgB + 5tgC$$

Bài 7. (VMEO 2005)

Cho $a,b,c$ là các số thực dương cho trước và $x,y,z$ là các số thực dương thỏa mãn $ax+by+cz = xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = x+y+z$$

Bài 8.

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ là $n$ số thực dương cho trước và $x_1,x_2,...,x_n$ là $n$ số thực dương thỏa mãn $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \prod_{i=1}^{n} x_i$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Bài 9. (Đề chọn đội tuyển ĐHSP Hà Nội 2005)

Cho $x,y,z$ là các số thực dương thỏa mãn $xy+yz+zx = 7xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{8x^4+1}{x^2} + \frac{108y^5+1}{y^2} + \frac{16z^6+1}{z^2}$$

Bài 10. (Toán Học Tuổi Trẻ 2005)

Cho $x,y,z \in [0,1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

Bài 11.

Chứng minh rằng với mọi dãy số dương $a_1,a_2,...,a_n$ ta có

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1+a_2} + ... + \frac{1}{a_1+a_2+...+a_n} < 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

# PHÖÔNG PHAÙP HEÄ SOÁ BAÁT ÑÒNH

Trong thôøi caáp 2, khi ñoïc lôøi giaûi cuûa khaù nhieàu baøi toaùn ñaëc bieät laø baát ñaúng thöùc, toâi khoâng theå hieåu noåi taïi sao ngöôøi ta laïi nghó ra ñöôïc lôøi giaûi ñoù vaø toâi caûm thaáy ñoù laø moät lôøi giaûi thieáu töï nhieân nhöng toâi cuõng caûm thaáy voâ cuøng thaùn phuïc ngöôøi ñaõ nghó ra lôøi giaûi ñoù. Nhöng baây giôø khi ñaõ ñöôïc laøm quen vôùi taát caû caùc kieán thöùc toaùn sô caáp, toâi môùi hieåu ñöôïc ñaây khoâng phaûi laø moät caùi gì môùi laï caû maø noù ñaõ coù moät phöông phaùp haún hoi. Trong baøi naøy, toâi xin giôùi thieäu vôùi caùc baïn moät trong nhöõng phöông phaùp ñoù: “Phöông phaùp heä soá baát ñònh”. Phöông phaùp naøy tuy coù moät soá haïn cheá nhöng noù vaãn laø moät phöông phaùp hay vaø khaù maïnh. Caùc baïn neân chuù yù ñeán noù vì ngoaøi vieäc giuùp ta chöùng minh moät baát ñaúng thöùc khoù thì noù coøn laø 1 “lieàu thuoác boå “ cho moät phöông phaùp chöùng minh baát ñaúng thöùc cöïc maïnh: “Phöông phaùp phaân tích bình phöông S.O.S” vì noù giuùp ta ñöa moät baát ñaúng thöùc veà daïng S.O.S nhanh choùng hôn caùc kieåu bieán ñoåi thoâng thöôøng.

Sau ñaây laø moät soá ví duï

**Ví duï 1. (USAMO 2003)**

Cho $a,b,c>0$. Chöùng minh raèng

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\le 8$$

*Nhaùp.*

Nhaän xeùt raèng daáu baèng xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

Do caû hai veá cuûa baát ñaúng thöùc ñaõ cho ñoàng baäc neân ta coù theå chuaån hoùa cho $a+b+c=3$. Khi ñoù, baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8$$

Ta se tìm so thöc $\alpha$ sao cho bat ñang thöc cho moi $a\in(0,3)$

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le \alpha(a-1)+\frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow f(a)=3\alpha a^3+(7-9\alpha)a^2+(15\alpha-22)a+15-9\alpha\ge 0$$

Ta can tìm $\alpha$ sao cho $f(a)\ge 0\ \forall a\in(0,3)$ va $f(a)=0\Leftrightarrow a=1$. Ñe co ñöôc ñieu nay, ta can co

$$f^{/}(1)=0\Leftrightarrow 9\alpha+2(7-9\alpha)+15\alpha-22=0\Leftrightarrow \alpha=\frac{4}{3}$$

Vay nhiem vu cua ta bay giô la xet xem bat ñang thöc sau co ñung hay khong

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le \frac{4}{3}.a+\frac{4}{3}$$

Vôi nhöng lap luan nhö tren, ta ñi ñen mot lôi giai khong may tö nhien nhö sau

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat, co the gia sö $a+b+c=3$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\le 8$$

Ta se chöng minh

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}\le \frac{4}{3}.a+\frac{4}{3}\qquad (*)$$

That vay

$(*)\Leftrightarrow (a-1)^2(4a+3)\ge 0$ (ñung)

Vay (*) ñung.

Töông tö, ta co

$$\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2} \le \frac{4}{3}.b+\frac{4}{3}$$

$$\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le \frac{4}{3}.c+\frac{4}{3}$$

Do ño

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2} \le \frac{4}{3}.(a+b+c)+4=8$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Rieng ñoi vôi bai toan tren con co mot cach tìm $\alpha$ cöc nhanh la

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}=\frac{1}{3}+\frac{8a+6}{3(a-1)^2+6} \le \frac{1}{3}+\frac{8a+6}{6}=\frac{4}{3}.a+\frac{4}{3}$$

Nhöng vôi ñöông loi nay thì ta kho ma lam manh bat ñang thöc hôn ñööc. That vay, toi ña co gang rat nhieu ñe dung ñöông loi nay ñe chöng minh bat ñang thöc sau nhöng van bat löc

$$\frac{(a+3)^2}{4a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{4b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{4c^2+(3-c)^2} \le 6$$

Vôi $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$.

Co the thay cach tìm $\alpha$ ban ñau la cach tìm hay nhat, nhöng no ñoi hoi kha nhieu tính toan rat bat lôi cho nhöng ban tính toan khong ñööc tot cho lam, va ñoi khi bieu thöc ñe bai cho qua phöc tap (chang han nhö qua nhieu can thöc). Vì nhöng lí do ño, toi xin ñööc giôi thieu vôi cac ban mot cach tìm $\alpha$ kha hieu qua döa tren bat ñang thöc AM-GM, cu the la ñoi vôi bai toan tren

Ta se tìm $\alpha, \beta$ sao cho bat ñang thöc sau ñung cho moi so döông $a,b,c$

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \le \frac{\alpha a+\beta b+\beta c}{a+b+c}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM (xin ñööc löu y vôi cac ban la trong cach tìm nay, ta khong can ñe y ñen chieu bat ñang thöc, toi xin ñööc ky hieu $\rightarrow$ ñe thay

cho dau bat ñang thöc va ta cung khong can ñe y ñen $\alpha, \beta$ am hay döông vì ñay chæ la nhap thoi), ta co

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \to \frac{8}{3}.a^{\frac{1}{3}}.(bc)^{-\frac{1}{6}}$$

$$\frac{\alpha a+\beta b+\beta c}{a+b+c} \to \frac{\alpha+2\beta}{3}.a^{\frac{\alpha}{\alpha+2\beta}-\frac{1}{3}}.(bc)^{\frac{\beta}{\alpha+2\beta}-\frac{1}{3}}$$

Ta chon $\alpha, \beta$ sao cho $\begin{cases} \alpha+2\beta=8 \\ \dfrac{\alpha}{\alpha+2\beta}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b}{\alpha+2\beta}-\dfrac{1}{3}=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$. Giai he nay, ta ñöôc $\begin{cases} \alpha=\dfrac{16}{3} \\ \beta=\dfrac{4}{3} \end{cases}$.

Vay nhiem vu cua chung ta bay giô la xet tính ñung ñan cua bat ñang thöc

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \le \frac{16a+4b+4c}{3(a+b+c)}$$

Ta co the chuan hoa cho $a+b+c=3$ roi chöng minh töông tö nhö tren, hoac bien ñoi töông ñöông.

Ví du 2.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge 1$$

*Nhap.*

Ñay la mot bai toan hay, töông ñoi kho. Ta co the giai bang cach lam töông tö nhö tren, xin danh cho cac ban. Ô ñay, toi xin giôi thieu mot cach giai khac nhö sau

Nhan xet rang dau bang xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

Ta se tìm $p$ sao cho bat ñang thöc sau ñung

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^p}{a^p+b^p+c^p}$$

Chung ta co 2 cach chon $p$ söi dung ñao ham hoac döa vao bat ñang thöc AM-GM, ve phía toi, toi rat ngai tính toan nen chæ xin ñöôc trình bay cach döa vao bat ñang thöc AM-GM, mong cac ban thong cam.

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \to \frac{1}{3}.a^{\frac{4}{3}}.(bc)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{a^p}{a^p+b^p+c^p} \to \frac{1}{3}.a^{\frac{2p}{3}}.(bc)^{-\frac{p}{3}}$$

Töi ñay, bang cach ñong nhat he so, ta suy ra ñöôc $p=2.$

Vay nhiem vu cua chung ta bay giô la kiem tra tính ñung ñan cua bat ñang thöc

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Vôi nhöng lap luan nhö tren, ta ñi ñen lôi giai nhö sau

*Lôi giai.*

Ta se chöng minh

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} \qquad (*)$$

That vay:

$$(*) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{a^3+(b+c)^3}} \ge \frac{\sqrt{a}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \ge a(a^3+(b+c)^3)$$

$$\Leftrightarrow 2a^2(b^2+c^2)+(b^2+c^2)^2 \ge a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2+c^2)((a^2+b^2)+(a^2+c^2)) \ge a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2+c^2)((a-b)^2+(a-c)^2)+2(b^2+c^2)a(b+c) \ge a(b+c)^3$$

$$\Leftrightarrow (b^2+c^2)((a-b)^2+(a-c)^2)+a(b+c)(b-c)^2 \ge 0 \text{ (ñung)}$$

Vaäy (*) ñuùng.

Töông töï, ta coù

$$\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}} \ge \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}$$
$$\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}$$

Do ñoù

$$\sqrt{\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}} \ge \frac{a^2+b^2+c^2}{a^2+b^2+c^2}=1$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

* Nhaän xeùt 1.

Caû hai ví duï treân ñeàu söû duïng ñaúng thöùc

$$1=\frac{a^p+b^p+c^p}{a^p+b^p+c^p}=\frac{1}{\alpha+\beta}.\frac{\alpha(a+b+c)+\beta(a+b+c)}{a+b+c}$$

Moät caâu hoûi ñaët ra cho ta laø khi naøo thì ta phaûi tìm $p$ vaø khi naøo thì ta phaûi tìm $\alpha,\beta$ ? Coù leõ caùc baïn seõ hôi luùng tuùng ôû choã naøy nhöng thaät ra thì ta chæ caàn nhìn bieåu thöùc ôû ñeà baøi laø bieát ngay thoâi, chaúng haïn nhö ôû ví duï 1, xeùt baát ñaúng thöùc

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2} \le \frac{8a^p}{a^p+b^p+c^p}$$

Khi cho $a\to 0, b=c=1$ thì ta coù $VT\to 1, VP\to 0$ neân baát ñaúng thöùc naøy khoâng theå ñuùng vôùi moïi soá döông $a,b,c$.

Ví duï 3.

Cho $a,b,c>0$. Chöùng minh raèng

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \ge \frac{a+b+c}{2}$$

*Nhaùp.*

Nhan xet rang dau bang xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

Ta se tìm $\alpha$ sao cho bat ñang thöc sau ñung

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}\geq \alpha a+(1-\alpha)b$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}\to a^2b^{-1}$$
$$\alpha a+(1-\alpha)b\to a^{\alpha}b^{1-\alpha}$$

Töø ñay, bang cach ñong nhat he so, ta co $\alpha=2$.

Vay nhiem vu cua ta bay giô la kiem chöng tính ñung ñan cua bat ñang thöc

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}\geq 2a-b$$

Ta ñi ñen lôi giai nhö sau

*Lôi giai.*

Ta co

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}\geq 2a-b \qquad (*)$$

That vay

$(*)\Leftrightarrow b(a-b)^2\geq 0$ (ñung)

Vay (*) ñung.

Töông töï, ta co $\dfrac{2b^3}{b^2+c^2}\geq 2b-c, \dfrac{2c^3}{c^2+a^2}\geq 2c-a$

Do ño

$$\frac{2a^3}{a^2+b^2}+\frac{2b^3}{b^2+c^2}+\frac{2c^3}{c^2+a^2}\geq a+b+c \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

* Nhan xet 2.

Bang kinh nghiem ban than, toi cho rang ñieu kien can ñe sö dung phöông phap nay vôi cac bat ñang thöc thuan nhat la

1) Dau ñang thöc xay ra khi va chæ khi cac bien so bang cac gia trò trong mot tap höu han nao ño (thöông tap nay chæ gom co 1 gia trò, toi ña la 2 gia trò).
2) Bat ñang thöc ñe bai cho la tong cua mot day cac bieu thöc ñoi xöng nhau va ton tai mot cach chuan hoa ñe moi bieu thöc chæ con phu thuoc vao mot bien so hoac cac bieu thöc la hoan vò lien tiep cua nhau.

Bay giô ta se xet mot so ví du ve bat ñang thöc co ñieu kien

Ví du 4.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a^2+b^2+c^2=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{4}{3}.(a+b+c)\ge 7$$

*Nhap.*

Nhan xet rang ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

Ta co $a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow a,b,c\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Ta se tìm $\alpha$ sao cho bat ñang thöc sau ñung vôi moi $a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{3}.a\ge\alpha(a^2-1)+\frac{7}{3} \qquad (*)$$

Ta co

$$(*)\Leftrightarrow f(a)=3\alpha a^3-4a^2+(7-3\alpha)a-3\le 0$$

Ta can tìm $\alpha$ sao cho $f(a)\le 0\ \forall a\in\left(0,\sqrt{3}\right)$ va $f(a)=0\Leftrightarrow a=1$. Ñe co ñöôc ñieu nay ta can co

$$f'(1)=0\Leftrightarrow 9\alpha-8+7-3\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\frac{1}{6}$$

Bay giô ta chæ con phai xet tính ñung ñan cua bat ñang thöc

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{3}.a\ge \frac{1}{6}.(a^2-1)+\frac{7}{3}$$

Ta ñi ñeln lôi giai nhö sau

*Lôi giai.*

Ta col $a^2+b^2+c^2=3\Rightarrow a,b,c\in\left(0,\sqrt{3}\right)$.

Ta sel chöng minh

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{3}.a\ge \frac{1}{6}.(a^2-1)+\frac{7}{3} \qquad (**)$$

Thalt valy

$(**)\Leftrightarrow (a-1)^2(6-a)\ge 0$ (ñulng do $\sqrt{3}>a>0$)

Valy (**) ñulng.

Töông töï, ta col

$$\frac{1}{b}+\frac{4}{3}.b\ge \frac{1}{6}.(b^2-1)+\frac{7}{3}$$
$$\frac{1}{c}+\frac{4}{3}.c\ge \frac{1}{6}.(c^2-1)+\frac{7}{3}$$

Do ñol

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{4}{3}.(a+b+c)\ge \frac{1}{6}.(a^2+b^2+c^2-3)+=7$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñalng thölc xaly ra khi val chæ khi $a=b=c=1$.

Xin ñöôlc löu yl vôi cacl baln ralng khollng phail lulc nalo ta culng löïa cholin halm lal nhöng halm tuyeln tính hoalc halm luly thöa khollng thoil, mal ñoli lulc ta caln phail löïa choln halm phaln thölc, halm caln, ... Ví dul sau sel cho chulng ta thaly rol ñieu ñol

Ví dul 5.(APMO 2005)

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=8$. Chöng minh ralng

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \ge \frac{2}{2+x^2} \quad \forall x>0 \qquad (*)$$

That vay, ta co

$$(*) \Leftrightarrow (2+x^2)^2 \ge 4(1+x^3)$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-2)^2 \ge 0 \text{ (ñung)}$$

Vay (*) ñung.

Do ño

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \ge \sum_{cyc} \frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)} = \frac{2S(a,b,c)}{36+S(a,b,c)} = \frac{2}{1+\dfrac{36}{S(a,b,c)}}$$

trong ño $S(a,b,c)=2(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Theo bat ñang thöc AM–GM, ta co

$$a^2+b^2+c^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^2}=12$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \ge 3\sqrt[3]{(abc)^4}=48$$
$$\Rightarrow S(a,b,c) \ge 72$$

Do ño

$$\sum_{cyc} \frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} \ge \frac{2}{1+\dfrac{36}{S(a,b,c)}} \ge \frac{2}{1+\dfrac{36}{72}} = \frac{4}{3} \Rightarrow \text{ñpcm.}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=2$.

# BAI TAP.

Bai 1. (IMO 2001)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b^2}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c^2}{\sqrt{c^2+8ab}}\ge 1$$

Bai 2.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\ge \frac{a+b+c}{3}$$

Bai 3.

Cho $a,b,c,d>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^4}{(a^2+b^2)(a+b)}+\frac{b^4}{(b^2+c^2)(b+c)}+\frac{c^4}{(c^2+d^2)(c+d)}+\frac{d^4}{(d^2+a^2)(d+a)}\ge \frac{a+b+c+d}{4}$$

Bai 4.

Cho $a,b,c,d>0$ thoa $a+b+c+d=1$. Chöng minh rang

$$6(a^3+b^3+c^3+d^3)\ge a^2+b^2+c^2+d^2+\frac{1}{8}$$

Bai 5. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\ge \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)^2}$$

Bai 6.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=2$. Tìm gia trò lôn nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{11b^3-a^3}{ab+4b^2}+\frac{11c^3-b^3}{bc+4c^2}+\frac{11a^3-c^3}{ca+4a^2}$$

Bai 7.

Cho $a,b,c,d>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{\sqrt[3]{a^3+63bcd}}+\frac{b}{\sqrt[3]{b^3+63cda}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63dab}}+\frac{c}{\sqrt[3]{c^3+63abc}}\geq 1$$

Bai 8.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a^3+b^3+c^3=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{5}{4}.(a^2+b^2+c^2)\geq\frac{27}{4}$$

Bai 9.

Cho $a,b,c>0.$ Chöng minh rang

$$\frac{(a+b-3c)^2}{(a+b)^2+2c^2}+\frac{(b+c-3a)^2}{(b+c)^2+2a^2}+\frac{(c+a-3b)^2}{(c+a)^2+2b^2}\geq\frac{1}{2}$$

Bai 10.

Cho $a,b,c>0.$ Chöng minh rang

$$\frac{(3a+b+c)^3}{(b+c)^3+3a^3}+\frac{(3b+c+a)^3}{(c+a)^3+3b^3}+\frac{(3c+a+b)^3}{(a+b)^3+3c^3}\leq\frac{375}{11}$$

Bai 11.

Cho $a,b,c$ la ñoi dai ba canh cua mot tam giac. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\geq 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bai 12.

Cho $x,y,z>0$ thoa $x+y+z=1$. Tìm gia trò lôn nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{x}{x^2+1}+\frac{y}{y^2+1}+\frac{z}{z^2+1}$$

Bai 13.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^3+\left(\frac{b}{c+a}\right)^3+\left(\frac{c}{a+b}\right)^3\geq\frac{3}{8}$$

Bai 14. (Moldova 2005)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a^4+b^4+c^4=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{4-ab}+\frac{1}{4-bc}+\frac{1}{4-ca}\leq 1$$

Bai 15.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{(a+b-c)^2}{(a+b)^2+3c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+3a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{(c+a)^2+3b^2}\geq\frac{9(a^2+b^2+c^2)}{7(a+b+c)^2}$$

Bai 16.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{(a+b-c)^2}{7(a+b)^2+17c^2}+\frac{(b+c-a)^2}{7(b+c)^2+17a^2}+\frac{(c+a-b)^2}{7(c+a)^2+17b^2}\geq\frac{a^2+b^2+c^2}{5(a+b+c)^2}$$

Bai 17.

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{a^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{b^2+1}{2}}+\sqrt{\frac{c^2+1}{2}}\leq a+b+c$$

Bai 18.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^7+7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{b^7+7}}+\frac{1}{\sqrt[3]{c^7+7}}\geq\frac{3}{2}$$

Bai 19. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thoa $a+b+c+d=4$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a^2+1}+\frac{1}{b^2+1}+\frac{1}{c^2+1}+\frac{1}{d^2+1}\ge 2$$

Bai 20.

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thoa $a+b+c+d=4$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{5+3a^2}+\frac{b}{5+3b^2}+\frac{c}{5+3c^2}+\frac{d}{5+3d^2}\le\frac{1}{2}$$

Bai 21. (Olympic 30 - 4 - 2006)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^4}{a^4+\sqrt[3]{(a^6+b^6)(a^3+c^3)^2}}+\frac{b^4}{b^4+\sqrt[3]{(b^6+c^6)(b^3+a^3)^2}}+\frac{c^4}{c^4+\sqrt[3]{(c^6+a^6)(c^3+b^3)^2}}\le 1$$

Bai 22. (Japan 1997)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{b^2+(c+a)^2}+\frac{c^2}{c^2+(a+b)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Bai 23. (Pham Van Thuan)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^3}{a^3+(b+c)^3}+\frac{b^3}{b^3+(c+a)^3}+\frac{c^3}{c^3+(a+b)^3}\ge\frac{1}{3}$$

Bai 22.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+2(b+c)^2}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+2(c+a)^2}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+2(a+b)^2}}\ge 1$$

Bai 23. (Pham Kim Hung, Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thoa $a+b+c+d=4$ va $k\ge 2$. Chöng minh rang

$$(a^{k+1}+1)(b^{k+1}+1)(c^{k+1}+1)(d^{k+1}+1)\ge(a^k+1)(b^k+1)(c^k+1)(d^k+1)$$

Bai 24.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=1$. Chöng minh rang

$$\frac{a+1}{c(2-b)}+\frac{b+1}{a(2-c)}+\frac{c+1}{b(2-a)}\geq\frac{36}{5}$$

Bai 25. (Romania 2005)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

Bai 26. (Pham Van Thuan)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $a+b+c\geq 3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a^2+b+c}+\frac{1}{b^2+c+a}+\frac{1}{c^2+a+b}\leq 1$$

# PHƯƠNG PHÁP PHÂN TÍCH BÌNH PHƯƠNG S.O.S

## A. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP.

### I. Bài toán mở đầu và định lý.

Thông thường, khi đứng trước một bài toán quen biết, cách chúng ta thường bắt đầu để giải quyết không phải là thử mò mẫm các bất đẳng thức đã biết, không phải là tìm ngay một cách dồn biến nào đó mà thông thường nhất là đưa về các dạng bình phương. Điều này dựa trên tính chất cơ bản nhất của số thực "$x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbf{R}$". Có rất nhiều bài toán, cho dù bạn chủ động hay vô tình, đều đã sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Tuy nhiên, rất có thể những điều bạn sắp đọc được trong mục này sẽ làm bạn thực sự ngạc nhiên…

Chúng ta sẽ mở đầu với bất đẳng thức AM-GM, đây có thể coi là bất đẳng thức cơ bản nhất trong những bất đẳng thức cơ bản. Nhưng chúng ta chỉ tìm hiểu bất đẳng thức này trong trường hợp $n$ rất nhỏ. Với $n=2$ chẳng hạn, ta có bất đẳng thức

**Ví dụ 1.** Với mọi $a,b \geq 0$, ta có bất đẳng thức $a^2+b^2 \geq 2ab.$

Sẽ không có nhiều điều cần phải bàn tới ở bất đẳng thức trên, ngay khi các bạn học về số thực thì việc chứng minh bất đẳng thức đó quá dễ. Bất đẳng thức tương đương với $(a-b)^2 \geq 0$ một điều quá hiển nhiên. Bây giờ, chúng ta xét tiếp khi $n=3$ và bất đẳng thức sau đây

**Ví dụ 2.** Với mọi $a,b,c \geq 0$, ta có bất đẳng thức $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc.$

Khi hỏi về một cách chứng minh thật cụ thể cho bất đẳng thức này, chúng ta sẽ cảm thấy có một chút bối rối! Tất nhiên, bất đẳng thức trên không khó, lời giải chỉ trong duy nhất một dòng…

$$VT-VP=\frac{1}{2}.(a+b+c)((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

Và chắc chắn đây là cách làm thông minh nhất, vì chúng ta không phải qua một bước trung gian nào cả. Cả hai ví dụ trên đều được chứng minh bằng phương pháp

phân tích bình phương nhưng theo một nghĩa tương đối hẹp. Thuận lợi rất lớn trong lời giải bài toán bằng cách này là việc sử dụng rất ít kiến thức “cao cấp”, thậm chí bạn không cần biết bất kỳ một định lý nào về bất đẳng thức cả. Ngoài ra, nó còn là một phương pháp rất tự nhiên theo suy nghĩ của chúng ta.

Nếu đọc kĩ các bài toán ở chương trước, các bạn đã gặp không ít những bài toán sử dụng phương pháp này trong chứng minh. Còn bây giờ, chúng ta sẽ khái quát hóa cách sử dụng và đi tìm bản chất của một phương pháp cực kỳ hiệu quả.

Bài toán quan trọng mà chúng ta phải xét đến trong mục này là một bất đẳng thức nổi tiếng đã được giới thiệu ở chương trước, bất đẳng thức Iran 96.

**Bài toán 1. (Iran 96)**

Với mọi số thực $a,b,c$ không âm, ta có

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

Đây cũng là bài toán có hình thức phát biểu rất đơn giản và đẹp mắt. Ngoài ra, nó còn là một bất đẳng thức rất khó khi bạn chưa được tiếp cận trước đó. Nhưng trước tiên, chúng ta hãy xem lại bất đẳng thức trong kỳ thi IMO 2005 và tìm một chứng minh thật tự nhiên cho nó.

**Ví dụ 3. (IMO 2005)**

$x,y,z$ là các số thực dương thỏa $xyz\geq 1$. Chứng minh

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geq 0$$

***Chứng minh*.**

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét trường hợp $xyz=1$ là đủ (các bạn hãy tự tìm hiểu lý do tại sao nhé!). Khi đó, ta có

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^5-x^2.xyz}{x^5+\left(y^2+z^2\right)xyz}=\frac{x^4-x^2yz}{x^4+(y^2+z^2)yz}\geq\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}$$

Đặt $a=x^2,b=y^2,c=z^2$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2-a(b+c)}{2a^2+(b+c)^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{a}{2a^2+(b+c)^2}-\frac{b}{2b^2+(c+a)^2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2.\frac{c^2+ac+bc+a^2+b^2-ab}{(2a^2+(b+c)^2)(2b^2+(c+a)^2)}\geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c \Leftrightarrow x=y=z=1$.

Chứng minh trên không phải là cách duy nhất, có thể còn nhiều chứng minh độc đáo hơn. Nhưng nếu xem xét khách quan thì chứng minh trên hoàn toàn rất tự nhiên và cơ bản. Nói khái quát, khi đứng trước một bất đẳng thức bất kỳ ba biến $a,b,c$ ta sẽ tìm cách đưa chúng về dạng tổng các bình phương ký hiệu

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Phần đưa về dạng chính tắc trên là bước đầu tiên trong cách sử dụng phương pháp S.O.S. Nếu bạn đã khá quen với bất đẳng thức thì việc lập công thức trên là tương đối đơn giản, chỉ cần biết qua một số phép biến đổi và hằng đẳng thức, còn nếu bạn chưa quen, thì các thắc mắc sẽ được giải quyết trong mục "Biểu diễn cơ sở của phương pháp S.O.S và một số kỹ thuật phân tích".

Tất nhiên, nếu trong biểu diễn cơ sở đó, các hệ số $S_a,S_b,S_c$ đều không âm thì bài toán được chứng minh. Từ trước tới nay, đây vẫn là cách bạn thường làm nhưng đây chỉ là trường hợp đơn giản nhất trong kỹ thuật chứng minh của phương pháp S.O.S. Điều quan trọng hơn, S.O.S giúp chúng ta giải quyết các trường hợp mà theo quan niệm cũ là không thể áp dụng được "có một hệ số trong $S_a,S_b,S_c$ không dương".

Thông thường, trong các bài toán đối xứng ta có thể giả sử $a\geq b\geq c$. Với các bài toán hoán vị thì phải xét thêm trường hợp $a\leq b\leq c$. Trong trường hợp $a\geq b\geq c$, ta có các nhận xét sau

1. Nếu $S_b\geq 0$, do $(a-c)^2\geq (a-b)^2+(b-c)^2$ nên

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+S_b)(b-c)^2+(S_c+S_b)(a-b)^2$$

và phần còn lại của bài toán là chứng minh $S_a+S_b \ge 0, S_b+S_c \ge 0.$ Nhưng hai bất đẳng thức này luôn có thể chứng minh khá đơn giản, vì chúng không còn phải nhân thêm với các bình phương $(a-b)^2,(b-c)^2,(c-a)^2$.

2. Nếu $S_b \le 0$, do $(a-c)^2 \le 2(a-b)^2+2(b-c)^2$ nên

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2$$

cũng vậy, việc chứng minh còn lại $S_a+2S_b \ge 0, S_c+2S_b \ge 0.$ sẽ đơn giản hơn rất nhiều.

Trong nhiều trường hợp, ta cần thêm một số ước lượng mạnh hơn, chẳng hạn ước lượng hay dùng đến là

$$a-c \ge \frac{a}{b}.(b-c) \ \ (a \ge b \ge c)$$

Chẳng hạn khi ta có $S_b, S_c \ge 0$ thì

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2 \ge S_a(b-c)^2+S_b.\frac{a^2}{b^2}.(b-c)^2=\frac{(b-c)^2}{b^2}.(a^2S_b+b^2S_a)$$

và như vậy bài toán sẽ được chứng minh nếu $a^2S_b+b^2S_a \ge 0$.

Ta có thể tóm tắt các kết quả trên thành định lý như sau

**Định lý S.O.S.**

Xét biểu thức

$$S=f(a,b,c)=S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2$$

trong đó $S_a, S_b, S_c$ là các hàm số theo $a,b,c$.

1. Nếu $S_a, S_b, S_c \ge 0$ thì $S \ge 0$.
2. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_b, S_a+S_b \ge 0, S_b+S_c \ge 0$ thì $S \ge 0$.
3. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_a, S_c, S_a+2S_b \ge 0, S_c+2S_b \ge 0$ thì $S \ge 0$.
4. Nếu $a \ge b \ge c$ và $S_b, S_c, a^2S_b+b^2S_a \ge 0$ thì $S \ge 0$.
5. Nếu $S_a+S_b+S_c \ge 0$ và $S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a \ge 0$ thì $S \ge 0$.

Ngoài ra, để $S \ge 0$ với mọi $a,b,c$ thì ta phải có

$$S_a+S_b\big|_{a=b}\ge 0, S_b+S_c\big|_{b=c}\ge 0, S_c+S_a\big|_{c=a}\ge 0.$$

Trong đó, $S_a+S_b\big|_{a=b}$ có nghĩa là ta xét biểu thức $S_a+S_b$ khi $a=b$. Với các bài toán đối xứng, ta có ngay $S_a=S_b$ khi $a=b$. Nhận xét này rất quan trọng trong các bài toán tìm hằng số tốt nhất.

Dường như định lý này còn có vẻ quá đơn giản và nếu nói rằng nó có ứng dụng với hầu hết các bất đẳng thức 3 biến thì thật khó mà tưởng tượng được. Nhưng thực tế S.O.S đã làm được điều này và đây là một điều rất ngạc nhiên.

Một câu hỏi nữa đặt ra là với những biểu thức nào thì ta có thể chuyển về dạng chính tắc S.O.S như vậy? Câu trả lời là mọi hàm số đối xứng $f(a,b,c)$ thỏa mãn điều kiện $f(a,a,a)=0$ và $f$ có thể chứa căn thức, phân thức của $a,b,c$ luôn luôn có biểu diễn ấy. Chứng minh điều này bạn xem trong phần tiếp theo.

Bây giờ là một số ví dụ cụ thể để chứng minh tính hiệu quả của phương pháp này, và nếu có thể thì trước tiên bạn hãy thử chứng minh chúng theo cách khác.

**Ví dụ 4.**

Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $a,b,c$ ta luôn có

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

***Chứng minh*.**

Ta chú ý đến hai đẳng thức sau đây

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}.((a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2)$$

$$(a+b)(b+c)(c+a)-8abc=c(a-b)^2+a(b-c)^2+b(c-a)^2$$

Như thế sau khi thêm bớt 1 ở mỗi số hạng vế trái, ta có bất đẳng thức tương đương

$$\frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2}{ab+bc+ca}\ge\frac{2c(a-b)^2+2a(b-c)^2+2b(c-a)^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Ta tìm được

$$S_a=\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca}-2a=b+c-a-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$S_b = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2b = c+a-b-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$

$$S_c = \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{ab+bc+ca} - 2c = a+b-c-\frac{abc}{ab+bc+ca}$$

Do tính đối xứng nên có thể giả sử $a \ge b \ge c$, khi đó dễ thấy $S_b, S_c \ge 0$. Dựa vào tiêu chuẩn thứ nhất, ta chỉ cần chứng minh rằng $S_a + S_b \ge 0$ là xong. Nhưng điều này rất hiển nhiên vì

$$S_a + S_b = 2c - \frac{2abc}{ab+bc+ca} = \frac{2c^2(a+b)}{ab+bc+ca} \ge 0$$

Vậy bất đẳng thức đã được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Chúng ta hãy trở lại với bất đẳng thức Iran 96.

**Ví dụ 5. (Iran TST 1996)**

Với mọi số thực $x, y, z$ không âm, ta có

$$(xy+yz+zx)\left(\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right) \ge \frac{9}{4}$$

***Chứng minh*.**

Đặt $a = x+y, b = y+z, c = z+x$. Ta phải chứng minh

$$(2ab+2bc+2ca-a^2-b^2-c^2)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right) \ge \frac{9}{4}$$

Bằng biến đổi đơn giản, ta có thể chuyển bất đẳng thức về dạng

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}\right) \ge 0$$

$$S_a = \frac{2}{bc} - \frac{1}{a^2}$$

$$S_b = \frac{2}{ca} - \frac{1}{b^2}$$

$$S_c = \frac{2}{ab} - \frac{1}{c^2}$$

Giả sử rằng $a \ge b \ge c$ thì $S_a, S_b \ge 0$. Sử dụng tiêu chuẩn 4, ta chỉ cần chứng minh

$$b^2 S_b + c^2 S_c \ge 0$$
$$\Leftrightarrow b^3 + c^3 \ge abc$$

nhưng bất đẳng thức này hiển nhiên đúng vì $a \le b + c \Rightarrow b^3 + c^3 \ge bc(b+c) \ge abc.$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b$, $c = 0$ hoặc các hoán vị tương ứng.

Có một vài chứng minh khác cho bất đẳng thức Iran 96, cách thông thường chúng ta biết là khai triển và sử dụng bất đẳng thức Schur (hoặc dùng định lý Muirhead), hoặc dùng đa thức đối xứng. Tuy nhiên, bạn đọc sẽ đồng ý với tôi rằng các phương pháp đó chỉ có ý nghĩa là chứng minh bất đẳng thức đúng về mặt toán học, chứ không để lại nhiều ấn tượng. Việc biết sử dụng phương pháp S.O.S đã làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều, đây thực sự là một lời giải đẹp và ngắn gọn, thỏa mãn được mỹ quan toán học của nhiều người.

Phương pháp phân tích bình phương đã từng xuất hiện theo cách này hay cách khác trong một số bất đẳng thức, vì nó là một hướng suy nghĩ rất tự nhiên đối với bất đẳng thức. Nhưng chắc chắn đây sẽ là lần đầu tiên mà phương pháp này được hệ thống và được coi là phương pháp chính thống cho chúng ta. Nó đem lại cho chúng ta một cách nhìn chủ động và vô cùng hiệu quả đối với các bài toán mà chỉ một thời gian ngắn trước còn là những bài toán vô cùng khó khăn. Bất đẳng thức Iran 96 được coi là bài toán cơ bản ứng dụng phương pháp này (mặc dù tác giả nghĩ đến S.O.S từ một bất đẳng thức cũ hơn). S.O.S là tên lấy từ chữ cái đầu tiên của cụm từ Sum of Square.

## II. Biểu diễn cơ sở phương pháp S.O.S.

### 1. Mở đầu.

Trong các bài toán được dẫn ra ở các mục trước hẳn các bạn đã nhận thấy sự lặp đi lặp lại của biểu thức dạng $F(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2$. Các định lý sau đây sẽ cho thấy sự tồn tại của biểu diễn đó. Chúng tôi tự giới hạn mình trong các lớp bất đẳng thức 3 biến đối xứng, tuy nhiên điều đó sẽ không làm hạn chế tầm

ứng dụng của phương pháp này. Các bạn có thể sử dụng các ví dụ để kiểm chứng rằng với cùng tư
tưởng dưới đây, hầu hết các bất đẳng thức hoán vị ba biến cũng có những biểu diễn tương tự. Chúc các bạn may mắn!

## 2. Các khái niệm cơ bản.

### 2.1. Tập xác định (TXĐ).

Từ đây trở đi nếu không có gì thay đổi, để cho bài toán rõ ràng và tránh những phiền phức không đáng có, TXĐ của tất cả các hàm số và bất đẳng thức sẽ giới hạn trong tập số thực $\mathbf{R}_+^3$, hơn nữa, đôi khi để hợp lý chúng ta sẽ bỏ đi điểm $(0,0,0)$.

### 2.2. Định nghĩa 1: Hàm đối xứng ba biến.

Một hàm phân thức ba biến $F(a,b,c)$ được gọi là đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $F(a,b,c)=F(x,y,z)$ đúng với mọi hoán vị $(x,y,z)$ của $(a,b,c)$.Hơn nữa nếu với mọi số thực dương $x$ mà $F(x,x,x)=0$ thì $F(a,b,c)$ được gọi là hàm đối xứng ba biến chuẩn.

### 2.3. Định nghĩa 2: Hàm nửa đối xứng ba biến.

Một hàm phân thức ba biến $G(a,b,c)$ được gọi là nửa đối xứng nếu và chỉ nếu đồng nhất thức sau $G(a,b,c)=G(a,c,b)$ đúng với mọi bộ ba số thực dương $(a,b,c)$. Hơn nữa nếu với mọi cặp hai số thực dương $x,y$ mà $G(x,y,y)=0$ thì $G(a,b,c)$ được gọi là hàm nửa đối xứng ba biến chuẩn.

## 3. Các định lý cơ sở.

### 3.1. Định lý 1: Cơ sở của phương pháp S.O.S.

Giả sử $F(a,b,c)$ là một đa thức đối xứng ba biến chuẩn, thì tồn tại một đa thức nửa đối xứng $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau đúng

$$F(a,b,c)=G(a,b,c)(b-c)^2+G(b,c,a)(c-a)^2+G(c,a,b)(a-b)^2$$

Trước khi đưa ra một chứng minh của định lý này dựa trên một số hiểu biết đơn giản về không gian vectơ chúng tôi muốn nhấn mạnh với các bạn rằng định lý trên là đủ để áp dụng đối với tất cả các hàm phân thức đối xứng ba biến. Bởi vì định lý 1 hạn chế trong các lớp đa thức ba biến nên có thể nói tới bậc của đa thức. Trong đa

thức ba biến $a,b,c$ sẽ chứa (và chỉ chứa!) các hạng tử $t_{m,n,p}a^m b^n c^p$ trong đó $m,n,p$ là các số nguyên không âm.

***Chứng minh định lý* 1.**

Ta chứng minh định lý 1 cho lớp các đa thức bậc $n$. Ký hiệu $S(F)$ là tập hợp tất cả các đa thức ba biến $F(a,b,c)$ đối xứng chuẩn bậc $n$, $S(Q)$ là tập hợp tất cả các đa thức $G(a,b,c)$ đối xứng ba biến chuẩn bậc $n$ dạng

$$G(a,b,c)=G(a,b,c)(b-c)^2+G(b,c,a)(c-a)^2+G(c,a,b)(a-b)^2$$

ở đây $G(a,b,c)$ là đa thức nửa đối xứng ba biến bậc $n-2$ (ta xét $n\geq 2$ vì với $n=1$ thì định lý hiển nhiên đúng).

Rõ ràng $S(Q)$ là không gian vectơ con của không gian vectơ $F(a,b,c)$. Và do đó, số chiều của $S(Q)$ không vượt quá số chiều của $S(F)$. (*)

Với các số nguyên không âm $\alpha,\beta,\gamma$ xét các đa thức đặc biệt sau đây

(i) $F_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)=\sum_{sym} a^\alpha b^\beta c^\gamma$

(ii) $G_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)=a^\alpha b^\beta c^\gamma + a^\alpha b^\gamma c^\beta$

(iii) $Q_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)=G_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)(b-c)^2+$

$$+G_{\alpha,\beta,\gamma}(b,c,a)(c-a)^2+G_{\alpha,\beta,\gamma}(c,a,b)(a-b)^2$$

Ký hiệu $f_n$ là tập hợp tất cả các bộ số $(\alpha,\beta,\gamma)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\alpha+\beta+\gamma=n, \alpha\geq\beta\geq\gamma.$$

Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $F_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)$ với $(\alpha,\beta,\gamma)\in f_n$ là hệ sinh độc lập tuyến tính của $S(F)$ do đó số chiều của $S(F)$ bằng số phần tử của $f_n$.(1)

Ký hiệu $q_n$ là tập hợp tất cả các bộ số $(\alpha,\beta,\gamma)$ thỏa mãn các điều kiện

$$\alpha+\beta+\gamma=n-2, \alpha+2\geq\beta\geq\gamma.$$

Rõ ràng tập hợp tất cả các đa thức $G_{\alpha,\beta,\gamma}(a,b,c)$ với $(\alpha,\beta,\gamma)\in q_n$ là hệ vectơ độc lập tuyến tính của $S(Q)$ do đó số chiều của $S(Q)$ không nhỏ hơn số phần tử của $q_n$. (2)

Từ các kết quả (1), (2) với chú ý là $f_n$ và $q_n$ có cùng số phần tử ta suy ra số chiều của $S(Q)$ không nhỏ hơn số chiều của $S(F)$. (**)

Vậy từ các kết quả (*), (**) suy ra số chiều của hai không gian $S(Q)$, $S(F)$ là bằng nhau, từ đó suy ra mọi phần tử của không gian $S(F)$ đều có thể biểu diễn qua các phần tử của không gian $S(Q)$. Đây là kết quả cần phải chứng minh.

Từ định lý này có thể nhận thấy một thuật toán tìm biểu diễn cơ sở, đó là tìm ma trận chuyển giữa hai không gian vectơ $S(Q)$ và $S(F)$. Dưới đây là một thuật toán sơ cấp hơn.

### 3.2 Định lý 2: Thuật toán tìm biểu diễn cơ sở.

Giả sử $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là hai đa thức nửa đối xứng ba biến, hơn nữa với mọi số thực dương $x$ thì phân số $\dfrac{M(x,x,x)}{N(x,x,x)}$ là một hằng số $t$. Khi đó tồn tại hàm số nửa đối xứng ba biến $G(a,b,c)$ sao cho đồng nhất thức sau đúng

$$\begin{aligned}F(a,b,c) &= \frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)}+\frac{M(b,c,a)}{N(b,c,a)}+\frac{M(c,a,b)}{N(c,a,b)}-3t\\ &= G(a,b,c)(b-c)^2+G(b,c,a)(c-a)^2+G(c,a,b)(a-b)^2\end{aligned}$$

***Chứng minh định lý* 2.**

Đối với hàm nửa đối xứng $G(a,b,c)$ chúng ta tiến hành ghép cặp các hạng tử nửa đối xứng $a^mb^nc^p+a^mb^pc^n$. Sau đó, nhóm tất cả các hạng tử có cùng bậc vào một nhóm. Bộ số $(n_1,n_2,...,n_k)$ với $n_1>n_2>...>n_k$ gồm tất cả các giá trị bậc của đa thức đó sắp theo thứ tự giảm dần gọi là bộ chỉ thị cho đa thức đó. Khi đó, ta có thể viết

$$G(a,b,c)=\sum_{i=1}^{k}\sum_{m+n+p=n_i,n\ge p} g_{m,n,p}.a^m(b^nc^p+b^pc^n)$$

Rõ ràng điều kiện $\dfrac{M(x,x,x)}{N(x,x,x)}$ là một hằng số với mọi số thực dương $x$ tương đương với sự kiện bộ chỉ thị của các đa thức $M(a,b,c), N(a,b,c)$ là giống nhau. Và do đó ta xét hiệu

$$\frac{M(a,b,c)}{N(a,b,c)}-t=\frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{m+n+p=n_i,n\ge p}\alpha_{m,n,p}.a^m(b^nc^p+b^pc^n)}{N(a,b,c)}$$

trong đó, $\alpha_{m,n,p}=m_{m,n,p}-tn_{m,n,p}$ và do đó $\sum_{m+n+p=n_i,n\ge p}\alpha_{m,n,p}=0,\forall i=1,2,...,n.$

Bây giờ đối với mỗi tổng bên trong tương ứng với mỗi giá trị $n_i$ của tử số chúng ta tiến hành sắp xếp lại thứ tự các hạng tử trong tử số của phân số trên sau đó sẽ dùng một biến đổi nhỏ để làm xuất hiện các nhân tử $a-b,b-c,c-a.$

Trước hết ta chia các nghiệm nguyên không âm $(m,n,p)$ thỏa mãn $n\ge p$ của phương trình $m+n+p=n_i$ thành $n_i$ nhóm theo các giá trị $m$. Sắp xếp lại thứ tự các nhóm theo độ giảm dần của $m$. Trong mỗi nhóm thì giá trị của $m$ là cố định, ta sắp xếp lại các nghiệm nguyên không âm của phương trình $n+p=n_i-m$ theo độ giảm dần của $n$ nếu $n_i-m$ lẻ và theo độ tăng dần của $n$ nếu $n_i-m$ chẵn. Sau khi đã sắp thứ tự xong, chúng ta có một thứ tự mới của các tập nghiệm ban đầu, mà ta sẽ ký hiệu là $\left\{(m_j,n_j,p_j)\middle| j=1,2,...,l\right\}$, ở đây $l$ là một hàm số phụ thuộc $n_i$. Để đơn giản ta ký hiệu

$$a_j=a^{m_j}(b^{n_j}c^{p_j}+b^{p_j}c^{n_j}),\ b_j=a_{m_j,n_j,p_j}$$

Khi đó mẫu số có thể viết lại một cách đơn giản là

$$\begin{aligned}&a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n=\\&=(a_1-a_2)b_1+(a_2-a_3)(b_1+b_2)+...+(a_{l-1}-a_l)(b_1+b_2+...+b_l).\end{aligned}$$

Sử dụng điều kiện $b_1+b_2+...+b_l=0$ và chia các hiệu $a_1-a_2,a_2-a_3,...,a_{l-1}-a_l$ vào ba loại sau

(i) $a^m(b^{n+1}c^p+b^pc^{n+1})-a^m(b^nc^{p+1}+b^{p+1}c^n)=a^mb^nc^p.\dfrac{b^{n-p}-c^{n-p}}{b-c}.(b-c)^2$

(ii) $a^{m+1}(b^nc^n+b^nc^n)-a^m(b^{n+1}c^n+b^nc^{n+1})=a^mb^nc^n[(a-b)-(c-a)]$

Xét biểu thức

$$\frac{a^mb^nc^n[(a-b)-(c-a)]}{N(a,b,c)}+\frac{b^mc^na^n[(b-c)-(a-b)]}{N(b,c,a)}+\frac{c^ma^nb^n[(c-b)-(b-c)]}{N(c,a,b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a-b, b-c, c-a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^n b^n c^n \left[\frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)}\right] = (a-b)^2.G(c,a,b)$$

trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^n a^n b^n}{N(a,b,c).N(b,c,a)}.\frac{a^{m-n}.N(b,c,a) - b^{m-n}.N(a,b,c)}{a-b}$$

ở đây, ta đã sử dụng $N(b,c,a) = N(b,a,c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến $a,b,c$ và đối xứng hai biến $a,b$ nên $G(c,a,b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

(iii) $a^{m+1}(b^{n+1}c^n + b^n c^{n+1}) - a^m(b^{n+1}c^{n+1} + b^{n+1}c^{n+1}) = a^m b^n c^n[c(a-b) - b(c-a)]$

Xét biểu thức

$$\frac{a^m b^n c^n[c(a-b)-b(c-a)]}{N(a,b,c)} + \frac{b^m c^n a^n[a(b-c)-c(a-b)]}{N(b,c,a)} + \\ + \frac{c^m a^n b^n[b(c-a)-a(b-c)]}{N(c,a,b)}$$

Tiến hành ghép từng phần trong ba hạng tử trong biểu thức này thành ba cặp theo các nhân tử $a-b, b-c, c-a$. Một trong ba hạng tử mới sẽ là

$$(a-b)a^n b^n c^{n+1} \left[\frac{a^{m-n}}{N(a,b,c)} - \frac{b^{m-n}}{N(b,c,a)}\right] = (a-b)^2.G(c,a,b)$$

trong đó

$$G(c,a,b) = \frac{c^{n+1} a^n b^n}{N(a,b,c).N(b,c,a)}.\frac{a^{m-n}.N(b,c,a) - b^{m-n}.N(a,b,c)}{a-b}$$

ở đây ta đã sử dụng $N(b,c,a) = N(b,a,c)$. Do cả tử số và mẫu số của phân số trên đều là những đa thức nửa đối xứng ba biến $a,b,c$ và đối xứng hai biến $a,b$ nên $G(c,a,b)$ là hàm nửa đối xứng ba biến.

Vậy trong cả ba trường hợp ta đều chỉ ra cách biến đổi thích hợp để đưa biểu thức về dạng biểu diễn cần thiết. Điều này hoàn thành việc chứng minh định lý 2. Niềm tin về sự tồn tại biểu diễn cơ sở đã được khẳng định.

## B. CÁC BÀI TẬP ÁP DỤNG.

### I. Bài tập có lời giải.

**Bài 1.**

Cho $a,b,c>0$ thỏa $\min\{a,b,c\}\geq\frac{1}{4}.\max\{a,b,c\}$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}+\frac{1}{16}.\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+b)^2}\right)$$

***Chứng minh.***

Không mất tính tổng quát giả sử $c\geq b\geq a\geq\frac{1}{4}.c>0$.

Đặt $\begin{cases}b+c=2x\\c+a=2y\\a+b=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+y+z\\b=x-y+z\\c=x+y-z\end{cases}\Rightarrow x,y,z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác

Do $c\geq b\geq a\geq\frac{1}{4}.c$ nên $x\geq y\geq z>0$ và $4(-x+y+z)\geq x+y-z\Rightarrow 3y+5z\geq 5x$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{4z^2}\right)\geq\frac{9}{4}+\frac{1}{16}.\left(\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 9+\frac{1}{4}.\left(\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{z^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{5}{4z^2}\right)\geq 0$$

Đặt $S_x=\frac{2}{yz}-\frac{5}{4x^2},S_y=\frac{2}{zx}-\frac{5}{4y^2},S_z=\frac{2}{xy}-\frac{5}{4z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\geq 0$$

Do $x\geq y\geq z>0$ và $3y+5z\geq 5x$ nên $S_x>0$ và $8y\geq 5x\Rightarrow S_y\geq 0$

Ta chứng minh

$$y^2S_y + z^2S_z \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2y^2}{xz} + \frac{2z^2}{xy} \geq \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(y^3 + z^3) \geq 5xyz$$

Mà $3y + 5z \geq 5x$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$4(y^3 + z^3) \geq (3y + 5z)yz$$

$$\Leftrightarrow (y - z)(4y^2 + yz - 4z^2) \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

Ta có $x - z \geq \frac{y}{z}.(x - y) \geq 0$.

Do đó

$$S_x(y-z)^2 + S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2 \geq S_y(z-x)^2 + S_z(x-y)^2$$

$$\geq S_y.\frac{y^2}{z^2}.(x-y)^2 + S_z(x-y)^2$$

$$= \frac{(x-y)^2(y^2S_y + z^2S_z)}{z^2}$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z$ hoặc $y = z = \frac{5}{8}.x$.

**Bài 2. (Vasile Cirtoaje)**

$a, b, c > 0$ thỏa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1-ab} + \frac{1}{1-bc} + \frac{1}{1-ca} \leq \frac{9}{2}$$

***Chứng minh.***

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(3 - \frac{2}{1-ab}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1-3ab}{1-ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2-6ab}{1-ab} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2(a^2+b^2+c^2)-6ab}{1-ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{2c^2-a^2-b^2}{1-ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{c^2-a^2}{1-ab} - \sum_{cyc} \frac{b^2-c^2}{1-ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} + \sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{1-bc} - \sum_{cyc} \frac{a^2-b^2}{1-ca} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3(a-b)^2}{1-ab} - \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2(a+b)c}{(1-bc)(1-ca)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2(3-4ac-4bc+a^2bc+ab^2c+3abc^2) \ge 0$$

Đặt

$$S_a = 3-4ab-4ac+ab^2c+abc^2+3a^2bc$$

$$S_b = 3-4ab-4bc+a^2bc+abc^2+3ab^2c$$

$$S_c = 3-4bc-4ac+ab^2c+a^2bc+3abc^2$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Ta có

$$\begin{aligned} S_a &> 3-4ab-4ac \\ &= 3(a^2+b^2+c^2)-4ab-4ac \\ &= 3\left(\frac{a^2}{2}+b^2\right)+3\left(\frac{a^2}{2}+c^2\right)-4ab-4ac \\ &\ge 3\sqrt{2}ab+3\sqrt{2}ab-4ab-4ac \\ &> 0 \end{aligned}$$

Do đó $S_a > 0$

Tương tự $S_b > 0, S_c > 0$

$$\Rightarrow S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 3. (Vietnam Team Selection Test 2006)**

Cho $x, y, z \in [1,2]$. Chứng minh

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 6\left(\sum_{cyc}\frac{x}{y+z}\right)$$

***Chứng minh.***

Ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương

$$\frac{(x+y+z)(xy+yz+zx)}{xyz} - 9 \geq 3\sum_{cyc}\left(\frac{2x}{y+z}-1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{xyz} \geq 3\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2}{(x+z)(y+z)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{z^2+xz+yz-2xy}{xy(x+z)(y+z)}.(x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(z^2+xz+yz-2xy)z(x+y)}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}.(x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(z^3x+z^3y+2xyz^2+x^2z^2+y^2z^2-2x^2yz-2xy^2z)(x-y)^2 \geq 0$$

Đặt

$$S_x = x^3y+x^3z+2x^2yz+x^2y^2+x^2z^2-2xy^2z-2xyz^2$$

$$S_y = y^3x+y^3z+2xy^2z+x^2y^2+y^2z^2-2x^2yz-2xyz^2$$

$$S_z = z^3x+z^3y+2xyz^2+x^2z^2+y^2z^2-2x^2yz-2xy^2z$$

Khi đó bất đẳng thức cần chứng trở thành

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x \geq y \geq z$.

Do $x, y, z \in [1,2]$ nên $y+z \geq x \geq y \geq z \geq \frac{x}{2}$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_x &= x^3y+x^3z+2x^2yz+x^2y^2+x^2z^2-2xy^2z-2xyz^2 \\ &= x^3y+x^3z+x(y+z)(xy+xz-2yz) \\ &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y &= y^3x + y^3z + 2xy^2z + x^2y^2 + y^2z^2 - 2x^2yz - 2xyz^2 \\ &= y(z+x)(y^2+xy+yz-2zx) \\ &\ge y(z+x)(z^2+xz+z^2-2zx) \\ &= yz(z+x)(2z-x) \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_y + S_z &= x(y^3+z^3) + yz(y+z)^2 + x^2(y-z)^2 - 2x^2yz \\ &\ge xyz(y+z) + yz(y+z)^2 - 2x^2yz \\ &\ge x^2yz + x^2yz - 2x^2yz \\ &= 0 \end{aligned}$$

Do đó theo tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(x,y,z) = (t,t,t),(2,1,1)\ \ (t \in [1,2])$.

**Bài 4.**

$a,b,c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{ab+bc+ca}{8a^2+bc} \ge 1$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \left( \frac{ab+bc+ca}{8a^2+bc} - \frac{bc}{ab+bc+ca} \right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(ab+bc+ca)^2 - bc(8a^2+bc)}{8a^2+bc} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2b^2 + a^2c^2 - 6a^2bc + 2ab^2c + 2abc^2}{8a^2+bc} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^2(b-c)^2}{8a^2+bc} + 2abc \sum_{cyc} \frac{b+c-2a}{8a^2+bc} \ge 0$$

Rõ ràng ta có $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a^2(b-c)^2}{8a^2+bc} \ge 0$.

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{b+c-2a}{8a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c-a}{8a^2+bc}-\sum_{cyc}\frac{a-b}{8a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a-b}{8b^2+ca}-\sum_{cyc}\frac{a-b}{8a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(8a+8b-c)}{(8a^2+bc)(8b^2+ca)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(8a+8b-c)(8c^2+ab)\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c>0$.

Đặt

$$S_a=(8b+8c-a)(8a^2+bc)$$
$$S_b=(8c+8a-b)(8b^2+ca)$$
$$S_c=(8a+8b-c)(8c^2+ab)$$

Thế thì ta có $S_b, S_c>0$.

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Ta có $a^2(8b^2+ca)\geq b^2(8a^2+bc)$

Do đó

$$\begin{aligned}a^2S_b+b^2S_a &= a^2(8c+8a-b)(8b^2+ca)+b^2(8b+8c-a)(8a^2+bc)\\ &\geq b^2(8c+8a-b)(8a^2+bc)+b^2(8b+8c-a)(8a^2+bc)\\ &= b^2(8a^2+bc)(7a+7b+16c)\\ &>0\end{aligned}$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có đpcm.

**Bài 5.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}\geq 0$$

***Chứng minh.***

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c>0$.

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-2a^2}{a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c^2-a^2}{a^2+bc}-\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{b^2+ca}-\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a^2+bc}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)(a+b-c)(c^2+ab)\geq 0$$

Đặt

$$S_a=(b+c)(b+c-a)(a^2+bc)$$

$$S_b=(c+a)(c+a-b)(b^2+ca)$$

$$S_c=(a+b)(a+b-c)(c^2+ab)$$

Thế thì ta có $S_b,S_c\geq 0$

Bất đẳng thức cần chứng minhh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Ta chứng minh

$$b^2S_a+a^2S_b\geq 0 \qquad (*)$$

$$\Leftrightarrow a^2(c+a-b)(c+a)(b^2+ca)\geq b^2(a-b-c)(b+c)(a^2+bc)$$

* Nếu $a\leq b+c$ bất đẳng thức (*) hiển nhiên đúng.

* Nếu $a>b+c$

Ta có $\begin{cases} c+a-b>a-b-c>0\\ c+a\geq b+c>0\\ a^2(b^2+ca)\geq b^2(c^2+ab)>0\end{cases}$ nên (*) đúng.

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra được đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(t,t,t),(t,t,0)\ \ (t>0)$..

**Bài 6. (Crux Mathematicorum)**

$a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh

$$\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\le\frac{4}{9}.\left(\frac{R}{r}-2\right)$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$\frac{R}{r}-2=\frac{pabc}{4S^2}-2$$
$$=\frac{2abc}{(a+b-c)(c+a-b)(b+c-a)}-2$$
$$=\sum\frac{(a-b)^2}{(c+a-b)(b+c-a)}$$

Do đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2}\le\frac{4}{9}.\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(b+c-a)(c+a-b)}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left(4\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-9(b+c-a)(c+a-b)\right)\right)\ge 0$$

Do $a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác nên $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ cũng là độ dài ba cạnh của một tam giác. Do đó

$$4\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-9(b+c-a)(c+a-b)>16c^2-9c^2=7c^2>0$$

Tương tự

$$4\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-9(a+b-c)(c+a-b)>16a^2-9a^2=7a^2>0$$
$$4\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^2-9(b+c-a)(a+b-c)>16b^2-9b^2=7b^2>0$$

Từ đây, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

## Bai 7. (Vasile Cirtoaje)

$a,b,c$ la ñoä dai ba caïnh cuûa moät tam giaùc. Khi ñoù, ta coù

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$$

*Chöùng minh.*

Ta coù

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right)\ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}-3\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(5a-5b+3c)(a-b)^2\ge 0$$

Ñaët $S_a=5b-5c+3a, S_b=5c-5a+3b, S_c=5a-5b+3c$.

Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

+ Tröôøng hôïp 1. $a\le b\le c$. Khi ñoù, ta coù $S_b\ge 0$ vaø

$$S_a+S_b=8b-2a>0 \text{ (do } b\ge a)$$

$$S_c+S_b=8c-2b>0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2+S_a(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (S_a+S_b)(b-c)^2+(S_c+S_b)(a-b)^2\ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2. $a\ge b\ge c$. Khi ñoù ta coù $S_a,S_c\ge 0$. Do ñoù neáu $S_b\ge 0$ thì ta coù ngay ñpcm, vì vaäy ta chæ caàn xeùt tröôøng hôïp $S_b\le 0$ laø ñuû.

+ Tröôøng hôïp 2.1. $a+\left(\sqrt{3}-1\right)c\le\sqrt{3}b\Leftrightarrow a-c\le\sqrt{3}(b-c)$

Ta coù

$$S_a+3S_b=14b+10c-12a\ge 12(b+c-a)>0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2+S_a(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (S_a+3S_b)(b-c)^2\ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2.2. $a+\left(\sqrt{3}-1\right)c\ge\sqrt{3}b\Leftrightarrow a-b\ge\left(\sqrt{3}-1\right)(b-c)$

+ Tröôøng hôïp 2.2.1. $a\ge\dfrac{3b}{2}$

Ta coù

$$S_a+2S_b=11b+5c-7a\ge 8(b+c)-7a>0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a > b + 13(a-b) - 5a = 8\left(a - \frac{3b}{2}\right) \geq 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2.2.2. $a \leq \frac{3b}{2}$

+ Tröôøng hôïp 2.2.2.1. $a + c \geq 2b \Rightarrow c \geq \frac{a}{3}$

Ta coù

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \geq 8(b+c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a \geq \frac{2a}{3} + 13.\frac{a}{3} - 5a = 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2.2.2.2. $a + c \leq 2b \Leftrightarrow a - c \leq 2(b-c)$

Ta coù

$$S_a + 4S_b + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c = (5a - 5b + 3c)\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 17b + 15c - 17a$$

Do $a + \left(\sqrt{3}-1\right)c \geq \sqrt{3}b$ neân $b \leq \frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)c}{\sqrt{3}}$

Suy ra

$$\begin{aligned} 5a - 5b + 3c &\geq 5a - \frac{5a}{\sqrt{3}} - \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)c}{\sqrt{3}} + 3c \\ &= \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)a}{\sqrt{3}} + \frac{\left(5-2\sqrt{3}\right)c}{\sqrt{3}} \\ &> \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)a}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Do ñoù

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c &> \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}} + 17b + 15c - 17a \\ &\geq \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}} + 16\left(b+c\right) - 17a \end{aligned}$$

$$> \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}} - a > 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge \left( S_a + 4S_b + \left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c \right)(b-c)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

**Bài 8.**

$x, y, z > 0$. Chứng minh rằng

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz + zx \ge \sqrt{2}\left( x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{z^2+x^2} + z\sqrt{x^2+y^2} \right)$$

***Chứng minh.***

Ta có, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2(x^2+y^2+z^2) - 2(xy+yz+zx) \ge$$
$$\ge 2\sqrt{2}\left( x\sqrt{y^2+z^2} + y\sqrt{z^2+x^2} + z\sqrt{x^2+y^2} \right) - 4(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\left( x\sqrt{2(y^2+z^2)} - x(y+z) \right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\frac{x(y-z)^2}{\sqrt{2(y^2+z^2)}+y+z}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2 \ge 2\sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y}$$

Ta lại có

$$2\sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{\sqrt{2(x^2+y^2)}+x+y} \le \sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{x+y} \text{ (theo bñt Bunhiacopxki)}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}(x-y)^2 \ge \sum_{cyc}\frac{z(x-y)^2}{x+y}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(1 - \frac{z}{x+y}\right)(x-y)^2 \ge 0$$

Đặt $S_x = 1 - \dfrac{x}{y+z}, S_y = 1 - \dfrac{y}{z+x}, S_z = 1 - \dfrac{z}{x+y}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z>0$. Khi đó $S_y,S_z>0$

Ta có

$$x^2S_y+y^2S_x=x^2+y^2-\frac{x^2y}{x+z}-\frac{xy^2}{y+z}\ge x^2+y^2-2xy\ge 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z$.

**Bài 9. (Hojoo Lee)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\ge 33$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}+\frac{9(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}-33=\frac{\left(\sum_{cyc}(a-b)^2\right)\left(\sum_{cyc}c(a-b)^2\right)}{abc(a^2+b^2+c^2)}\ge 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 10. (IMO 2005)**

$x,y,z$ là các số thực dương thỏa $xyz\ge 1$. Chứng minh

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\ge 0$$

***Chứng minh.***

Không mất tính tổng quát ta chỉ cần xét trường hợp $xyz=1$ là đủ. Khi đó, ta có

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}=\frac{x^5-x^2.xyz}{x^5+\left(y^2+z^2\right)xyz}=\frac{x^4-x^2yz}{x^4+(y^2+z^2)yz}\ge\frac{2x^4-x^2(y^2+z^2)}{2x^4+(y^2+z^2)^2}$$

Đặt $a=x^2,b=y^2,c=z^2$. Khi đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc} \frac{2a^2 - a(b+c)}{2a^2 + (b+c)^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)\left( \frac{a}{2a^2 + (b+c)^2} - \frac{b}{2b^2 + (c+a)^2} \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 . \frac{c^2 + ac + bc + a^2 + b^2 - ab}{(2a^2 + (b+c)^2)(2b^2 + (c+a)^2)} \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c \Leftrightarrow x = y = z = 1$.

**Bài 11. (Moldova 2006)**

$a, b, c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$a^2\left(\frac{b}{c} - 1\right) + b^2\left(\frac{c}{a} - 1\right) + c^2\left(\frac{a}{b} - 1\right) \geq 0$$

***Chứng minh.***

**+ Cách 1.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} a^3 b(b-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sum_{cyc} c^2 (b+c-a)(a-b)^2 \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

**+ Cách 2.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}\geq\sum_{cyc}a^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^2b}{c}+bc-2ab\right)\geq\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b(c-a)^2}{c}\geq\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{c}{a}-\frac{1}{2}\right)\geq 0$$

Đặt $S_a=\frac{a}{b}-\frac{1}{2},S_b=\frac{b}{c}-\frac{1}{2},S_c=\frac{c}{a}-\frac{1}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

**+ Trường hợp 1.** $b+c>a\geq b\geq c$. Thế thì ta có $S_a,S_b>0$.

Ta có

$$S_b+S_c=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-1>0(\text{do}\, b\geq c>0)$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

**+ Trường hợp 2.** $a\leq b\leq c<a+b$. Thế thì ta có $S_c,S_b>0$.

Ta có

$$S_b+S_a=\frac{b}{c}+\frac{a}{b}-1>\frac{b}{c}+\frac{c-b}{b}-1=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2=\frac{(b-c)^2}{bc}\geq 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0\ \text{(đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 12.**

$x, y, z$ là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2+yz}{(y+z)^2}+\frac{y^2+zx}{(z+x)^2}+\frac{z^2+xy}{(x+y)^2}\ge\frac{3}{2}$$

***Chứng minh.***

Đặt $a=y+z, b=z+x, c=x+y$. Khi đó, ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{2bc-ca-ab+a^2}{a^2}-1\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{b(c-a)}{a^2}-\frac{c(a-b)}{a^2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{b(c-a)}{a^2}-\sum_{cyc}\frac{c(a-b)}{a^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a-b)}{b^2}-\sum_{cyc}\frac{c(a-b)}{a^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2(a+b)}{a^2b^2}\ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 13. (Gabriel Dospinescu)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(ab+bc+ca)^2\ge 8a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)(ab+bc+ca)^2\ge 8a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^6(b-c)^2(b^2+bc+c^2)+2abc(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\left(\sum_{cyc}c(a-b)^2\right)\ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 14. (Old And New Inequalities)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\left|\sum_{cyc}\frac{a^3-b^3}{a+b}\right|\le\frac{1}{4}.\sum_{cyc}(a-b)^2$$

***Chứng minh.***

Đặt $\begin{cases}b+c=2x\\c+a=2y\\a+b=2z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-x+y+z\\b=x-y+z\\c=x+y-z\end{cases}\Rightarrow x,y,z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left|\sum_{cyc}\frac{(x-y)^3}{z}\right|\le\sum_{cyc}(x-y)^2$$

Ta có

$$\sum_{cyc}(x-y)^2-\sum_{cyc}\frac{(x-y)^3}{z}=\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2(y+z-x)}{z}\ge 0$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}(x-y)^2\ge\sum_{cyc}\frac{(x-y)^3}{z}\qquad(1)$$

Ta lại có

$$\sum_{cyc}(x-y)^2+\sum_{cyc}\frac{(x-y)^3}{z}=\sum_{cyc}\frac{(x-y)^2(z+x-y)}{z}\ge 0$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}(x-y)^2\ge-\sum_{cyc}\frac{(x-y)^3}{z}\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 15. (USA Team Selection Test 2004)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc}\le 3\max\left\{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2,\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^2,\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^2\right\}$$

***Chứng minh.***

Đặt $a=x^6,b=y^6,c=z^6$ $(x,y,z>0)$. Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$x^6+y^6+z^6-3x^2y^2z^2\le 3\max\{(x^3-y^3)^2,(y^3-z^3)^2(z^3-x^3)^2\}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$x^6+y^6+z^6-3x^2y^2z^2\le (x^3-y^3)^2+(y^3-z^3)^2+(z^3-x^3)^2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2(2(x^2+y^2+xy)^2-(x^2+y^2+z^2)(x+y)^2)\ge 0$$

Đặt

$$\begin{aligned}S_x&=2(y^2+z^2+yz)^2-(x^2+y^2+z^2)(y+z)^2\\&=y^4+z^4+4y^2z^2+2y^3z+2yz^3-x^2y^2-x^2z^2-2x^2yz\\S_y&=2(z^2+x^2+zx)^2-(x^2+y^2+z^2)(z+x)^2\\&=z^4+x^4+4z^2x^2+2x^3z+2xz^3-x^2y^2-y^2z^2-2xy^2z\\&=(x+z)^2(x^2-y^2)+3z^2x^2+2xz^3\\S_z&=2(x^2+y^2+xy)^2-(x^2+y^2+z^2)(x+y)^2\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $x\ge y\ge z>0$. Khi đó, rõ ràng ta có $S_y,S_z>0$.

Ta có

$$S_x+S_y=(x^2-y^2)^2+2z^3(x+y)+2z(x+y)(x-y)^2>0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=z\Leftrightarrow a=b=c$.

**Bài 16. (Phạm Kim Hùng)**

$a \ge b \ge c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{3a^3+2b^3} \ge \frac{a+b+c}{5}$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^4}{3a^3+2b^3} \ge \frac{a+b+c}{5}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{25a^4}{3a^3+2b^3} \ge 5(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \left( \frac{25a^4}{3a^3+2b^3} - 11a + 6b \right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2(a-b)^2(-4a^2+ab+6b^2)}{3a^3+2b^3} \ge 0$$

Đặt $S_a = \dfrac{-4b^2+bc+6c^2}{3b^3+2c^3}, S_b = \dfrac{-4c^2+ca+6a^2}{3c^3+2a^3}, S_c = \dfrac{-4a^2+ab+6b^2}{3a^3+2b^3}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2S_a(b-c)^2 + 2S_b(c-a)^2 + 2S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Rõ ràng ta có $S_b \ge 0$. Ta sẽ chứng minh rằng

$$S_b + 2S_c \ge 0 \qquad (1)$$

$$a^2 S_b + 2b^2 S_a \ge 0 \qquad (2)$$

*** Chứng minh (1).**

Ta có bất đẳng thức (1) tương đương với

$$2a^3(a^2+2ab+3b^2-6c^2) + 12a^2(ab^2+b^3-2c^3) +$$
$$+ 2(a^3b^2 + a^4c - 4b^3c^2) + a^4c + 2ab^3c + 6abc^3 + 36b^2c^3 \ge 0$$

Điều này hiển nhiên đúng do $a \ge b \ge c > 0$. Vậy (1) đúng.

*** Chứng minh (2).**

Ta có

$$(2) \Leftrightarrow f(a) = a^2(3b^3+2c^3)(6a^2+ac-4c^2)+$$
$$+2b^2(3c^3+2a^3)(6c^2+bc-4b^2) \geq 0$$

$$f^{/}(a) = 24a^2(3ab^3+2ac^3-2b^4)+$$
$$+ac(3b^2(7ab+ac-8bc)+16c(ab^2-c^3)+53ab^2c) > 0 \text{ (do } a \geq b \geq c > 0)$$

$\Rightarrow f(a)$ đồng biến.

$$\Rightarrow f(a) \geq f(b) = b^2(b^2(2b^3+7b^2c+3bc^2-12c^3)+9b^3c^2+8bc^4+28c^5) \geq 0$$

$\Rightarrow$ (2) đúng.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$2S_a(b-c)^2+2S_b(c-a)^2+2S_c(a-b)^2 \geq$$

$$\geq (S_b+2S_c)(a-b)^2+\frac{(b-c)^2(a^2S_b+2b^2S_a)}{b^2} \geq 0 \text{ (do } a-c \geq \frac{a}{b}.(b-c) \geq 0)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

**Bài 17. (Phạm Kim Hùng)**

Cho caic soi khoing aim $a,b,c$. Chöing minh raing

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{3}$$

*Chöing minh.*

Ta coi bait ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2 \geq 0$$

Coi 2 tröông hôip xaiy ra

+ Tröông hôip 1. $a \geq b \geq c \geq 0$. Khi ñoi, ta coi

$$\frac{4b}{2a^2+b^2}-\frac{c}{2c^2+a^2} \geq 0$$

$$\frac{-2a}{2a^2+b^2}+\frac{2a}{2c^2+a^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2}+\frac{2a-c}{2c^2+a^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4b-2a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2 \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{(4c-2b)b^2}{2b^2+c^2}+\frac{(2a-c)a^2}{2c^2+a^2}\geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{4c-2b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\geq 0 \qquad (2)$$

Coing caic bat ñaing thöic (1) vai (2) vei theo vei roi chia cai hai vei cho 2, ta ñöôic

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\geq 0$$

+ Tröôing hôip 2. $c\geq b\geq a\geq 0$.

+ Tröôing hôip 2.1. $2b\geq c+a$. Khi ñoi, ta sei chöing minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2}\geq 0$$

That vaiy, dei thaiy vei trai la ham taing cuia $c$ nein ta chæ cain chöing minh khi $c=b$, töic la chöing minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-b)}{2b^2+a^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^3+2a^2b-2ab^2+16a^3-8a^2b+8ab^2-4b^3\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3a(5a^2-2ab+2b^2)\geq 0$$ (ñuing)

Do ñoi $\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2}\geq 0$

Vaiy

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\geq$$

$$\geq \frac{2b-a}{4(2a^2+b^2)}.(c-a)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2$$

$$\geq 0$$

+ Tröôing hôip 2.2. $2b\leq c+a$. Khi ñoi, ta sei chöing minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{6a-3c}{2c^2+a^2}\geq 0 \qquad (3)$$

That vaiy, dei thaiy vei trai la ham taing cuia $c$ nein chæ cain chöing khi $c=2b-a$. Bat ñaing thöic (3) trôi thanh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{9a-6b}{8b^2+3a^2-8ab}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 10b^3-15b^2a+2a^2b+15a^3\geq 0$$ (ñuing)

Tiep theo, ta sei chöing minh

$$\frac{2c-b}{2b^2+c^2}+\frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\geq 0 \qquad (4)$$

That vay, vì ve trai la ham giam theo $a$ nen ta chæ can chöùng minh khi $a=b$, bat ñang thöùc trôû thanh

$$\frac{4c-2b}{2b^2+c^2}+\frac{6b-3c}{2c^2+b^2}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5c^3+2c^2b-2b^2c+10b^3\geq 0$$ (ñuùng)

Neu $c\leq 2a$ thì ta co bat ñang thöùc can chöùng minh ñuùng. Neu $c\geq 2a$ thì töø 2 bat ñang thöùc tren, vôùi chuù yù rang $(c-a)^2\leq 3(b-a)^2+\frac{3}{2}.(c-b)^2$, ta co

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\geq$$

$$\geq\left(\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{3(2a-c)}{2c^2+a^2}\right).(b-a)^2+\left(\frac{2c-b}{2b^2+c^2}+\frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\right).(c-b)^2$$

$$\geq 0$$

Toùm lai, ta luon co

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\geq 0$$ (ñpcm)

Ñang thöùc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

**Bài 18. (Phạm Văn Thuận)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 2$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{2(ab+bc+ca)}-\frac{c}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2((a+b-c)(ab+bc+ca)-abc)\geq 0$$

Đặt

$$S_a=(-a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$S_b=(a-b+c)(ab+bc+ca)-abc$$

$$S_c=(a+b-c)(ab+bc+ca)-abc$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Thế thì ta có $S_b, S_c \ge 0$.

Ta có

$$S_a + S_b = 2c^2(a+b) \ge 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$ hoặc $a = b, c = 0$ và các hoán vị.

**Bài 19. (Phạm Văn Thuận)**

$a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} - \frac{1}{2}.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} - \frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right) \le 2$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\left(\sum_{cyc}(a-b)^2\right)\left(\frac{4}{a^2+b^2+c^2} + \frac{a+b+c}{abc} - \frac{1}{ab+bc+ca}\right) \ge 0$$

Bất đẳng thức này đúng do $\dfrac{a+b+c}{abc} \ge \dfrac{9}{ab+bc+ca}$.

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

**Bài 20. (Phạm Kim Hùng)**

$a, b, c > 0$. Chứng minh rằng

$$\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} + \frac{2b^2+5ca}{(c+a)^2} + \frac{2c^2+5ab}{(a+b)^2} \ge \frac{21}{4}$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2} - \frac{7}{4}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{8a^2-7b^2-7c^2+6bc}{(b+c)^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{(b+c)^2}-4\sum_{cyc}\frac{c^2-a^2}{(b+c)^2}-3\sum_{cyc}\frac{(b-c)^2}{(b+c)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{4(a+b)(a+b+2c)}{(a+c)^2(b+c)^2}-\frac{3}{(a+b)^2}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(4(a+b)^3(a+b+2c)-3(a+c)^2(b+c)^2\right)\ge 0$$

Đặt

$$S_a=4(b+c)^3(b+c+2a)-3(a+b)^2(a+c)^2$$
$$S_b=4(a+c)^3(a+2b+c)-3(a+b)^2(b+c)^2$$
$$S_c=4(a+b)^3(a+b+2c)-3(a+c)^2(b+c)^2$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c>0$.

Khi đó, ta dễ dàng nhận thấy $S_b,S_c\ge 0$.

Ta có

$$\begin{aligned}S_b+S_a&=4(c+a)^3(a+2b+c)-3(a+b)^2(b+c)^2+\\&\qquad+4(b+c)^3(b+c+2a)-3(a+b)^2(a+c)^2\\&=8c(a+b)((a+c)^2+(b+c)^2)+(a-b)^2(a^2+b^2+4ab+2ac+2bc-2c^2)\\&\ge 0\end{aligned}$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(t,t,t),(t,t,0)$ $(t>0)$.

*** Chú ý.**

$\frac{5}{2}$ cũng là hằng số tốt nhất của bất đẳng thức

$$\frac{a^2+kbc}{(b+c)^2}+\frac{b^2+kca}{(c+a)^2}+\frac{c^2+kab}{(a+b)^2}\ge\frac{3(k+1)}{4}$$

**Bài 21.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}+a+b+c\ge\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)\ge 2\left(\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}-a-b-c\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b+c}\right)\ge 0$$

Đặt $S_a=\frac{1}{c}-\frac{2}{a+b+c}, S_b=\frac{1}{a}-\frac{2}{a+b+c}, S_c=\frac{1}{b}-\frac{2}{a+b+c}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Ta có

$$S_a+S_b+S_c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{6}{a+b+c}\ge\frac{9}{a+b+c}-\frac{6}{a+b+c}=\frac{3}{a+b+c}>0$$

Ta lại có

$$S_aS_b+S_bS_c+S_cS_a=\frac{\sum_{cyc}a(a+b-c)(a-b+c)}{abc(a+b+c)^2}$$

$$=\frac{\sum_{cyc}a^3+3abc-\sum_{cyc}ab(a+b)}{abc(a+b+c)^2}$$

$$\ge\frac{\sum_{cyc}a^3+3abc-\sum_{cyc}ab(a+b)}{abc(a+b+c)^2}$$

$\ge 0$ (theo bñt Schur)

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 5, ta có đpcm.

**Bài 22. (Phạm Kim Hùng)**

Cho cac so döông $a,b,c$. Chöng minh rang
$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(a+\frac{c^2}{b}\right)^2\ge\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}.$$

***Chứng minh.***

Ta co
$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(a+\frac{c^2}{b}\right)^2\ge\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c}+\sum_{cyc}\frac{a^4}{b^2}\ge\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$
$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\left(\frac{ab^2}{c}+ac-2ab\right)+\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{b^2}+b^2-2a^2\right)+$$
$$+2\left(\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2\right)\ge\frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}-4(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(b-c)^2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}-4\right)\ge 0$$

Ñat
$$S_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}-4$$
$$S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{4b}{a+b+c}+\frac{2(b+c)}{a}-4$$
$$S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{4c}{a+b+c}+\frac{2(c+a)}{b}-4$$

Bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi
$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Co 2 tröông hôp xay ra

+ Tröông hôp 1. $c\ge b\ge a>0$. Khi ño, ta co $S_b\ge 0$.

Ta co
$$S_a+S_b=\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{4(a+b)}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}+\frac{2(b+c)}{a}-8\ge 0$$

Vì $\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2,\frac{2a}{c}+\frac{2c}{a}\ge 4,\frac{2b}{a}\ge 2$

$$S_c+S_b=\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}+\frac{4(b+c)}{a+b+c}+\frac{2(a+c)}{b}+\frac{2(b+c)}{a}-8\ge 0$$

Vì $\frac{a^2}{b^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge 2, \frac{2a}{b}+\frac{2b}{a}\ge 4, \frac{2c}{a}\ge 2$

Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (S_a+S_b)(b-c)^2+(S_c+S_b)(a-b)^2\ge 0$$

+ Tröông hôp 2. $a\ge b\ge c>0$. Khi ño, ta co $S_a\ge 1, S_c\ge -1$.

Ta co

$$S_a+2S_b=\frac{b^2}{c^2}+\frac{2c^2}{a^2}+\frac{8b+4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}+\frac{4(b+c)}{a}-12\ge 0$$

Vì $\frac{4a+8b}{a+b+c}\ge 4, \frac{2a}{c}+\frac{2b}{a}\ge 4, \frac{2c}{a}+\frac{2a}{c}\ge 4$

$$S_a+4S_b=\frac{b^2}{c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{16b+4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}+\frac{8(b+c)}{a}-20$$

$$\ge\frac{b^2}{c^2}+\frac{4c^2}{a^2}+\frac{8b+4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}+\frac{8(b+c)}{a}-16=f(b)$$

De dang kiem tra $f(b)$ la ham ñong bien. Do ño

$$f(b)\ge f(c)=\frac{4c^2}{a^2}+\frac{16c}{a}+\frac{2a}{c}-9\ge 2\sqrt{32}-9>1$$

+ Kha nang 2.1. $a+c\le 2b\Leftrightarrow 2(b-c)\ge a-c\ge 0\wedge b-c\ge a-b\ge 0$.

Neu $S_b\ge 0$ thì ta co ngay ñpcm. Neu $S_b\le 0$, thì

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (S_a+4S_b-1)(b-c)^2\ge 0$$

+ Kha nang 2.2. $a+c\ge 2b$.. Khi ño, ta se chöng minh $S_c+2S_b\ge 0$. That vay, ta co

$$S_c+2S_b=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2c^2}{a^2}+\frac{8b+4c}{a+b+c}+\frac{2(a+c)}{b}+\frac{4(b+c)}{a}-12=g(c)$$

+ Kha nang 2.2.1. $a\ge 2b$. Khi ño, do $g(c)$ la ham tang nen

$$g(c)\ge g(0)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b}{a+b}+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}-12\ge 0$$

Vì $\frac{a}{b}+\frac{9b}{a+b}\ge 5, \frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\ge 4, \frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}\ge 6, \frac{-b}{a+b}\ge\frac{-1}{3}$

+ Kha nang 2.2.2. $a\le 2b$. Khi ño, do $g(c)$ la ham tang nen

$$g(c)\ge g(2b-a)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b^2}{a^2}+\frac{4b}{a}-\frac{4a}{3b}-\frac{14}{3}\ge 0 \text{ (do } 2b\ge a\ge b)$$

Vay

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

**Bài 23.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{29a^3-b^3}{6a^2+ab} \le 4(a+b+c)$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{29a^3-b^3}{6a^2+ab}-4a\right) \le 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b^3+4a^2b-5a^3}{6a^2+ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b-a)(5a^2+ab+b^2)}{6a^2+ab} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b-a)(b^2-a^2)}{6a^2+ab}+\sum_{cyc}(b-a) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b-a)^2(a+b)}{6a^2+ab} \ge 0 \text{ (ñung)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 24.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b} \ge 5(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2}{3a+b}-(a^2+4b^2-ab)\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{4a^3+5b^3-3a^2b+10ab^2-(3a+b)(a^2+4b^2-ab)}{3a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{3a+b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b-a)^2(a+b)}{3a+b} \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 25.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{3a^3+7b^3}{2a+3b} \geq 3(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \left( \frac{3a^3+7b^3}{2a+3b} - (a^2+2b^2-ab) \right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{3a^3+7b^3-(2a+3b)(a^2+2b^2-ab)}{2a+3b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a^3+b^3-a^2b-ab^2}{2a+3b} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(b-a)^2(a+b)}{2a+3b} \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 26.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{2a^4}{a^3+b^3}\ge a+b+c$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{4a^4}{a^3+b^3}\ge 2(a+b+c)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{4a^4}{a^3+b^3}-5a+3b\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(3b^2+ab-a^2)}{a^3+b^3}\ge 0$$

Đặt

$$S_a=\frac{3c^2+bc-b^2}{b^3+c^3}$$
$$S_b=\frac{3a^2+ac-c^2}{c^3+a^3}$$
$$S_c=\frac{3b^2+ab-a^2}{a^3+b^3}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

**+ Trường hợp 1.** $a\le b\le c$. Khi đó, dễ thấy $S_c,S_a\ge 0$. Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh được $S_c+2S_b\ge 0, S_a+2S_b\ge 0$.

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 3, ta suy ra đpcm.

**+ Trường hợp 2.** $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_b\ge 0$.

Ngoài ra, ta cũng dễ dàng chứng minh được

$$S_b+2S_c\ge 0$$
$$a^2S_b+2b^2S_a\ge 0$$

Do đó

$$2S_a(b-c)^2+2S_b(c-a)^2+2S_c(a-b)^2\ge$$

$$\ge\left(S_b+2S_c\right)(a-b)^2+\frac{(b-c)^2}{b^2}.(a^2S_b+2b^2S_a)$$

$$\ge 0\ \text{(do } a-c\ge\frac{a}{b}.(b-c)\ge 0)$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 27.**

$x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{x^2-z^2}{y+z}\ge 0$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{4x^2}{y+z}\ge\sum_{cyc}\frac{4z^2}{y+z}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2}{y+z}-2(x+y+z)\ge\sum_{cyc}\frac{4z^2}{y+z}-2(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{4x^2}{y+z}-\left(y+z\right)\right)\ge\sum_{cyc}\left(\frac{4z^2}{y+z}+\left(y-3z\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2-y^2-z^2-2yz}{y+z}\ge\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{y+z}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2-2y^2-2z^2}{y+z}+\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{y+z}\ge\sum_{cyc}\frac{(y-z)^2}{y+z}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4x^2-2y^2-2z^2}{y+z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2x^2-y^2-z^2}{y+z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2-y^2}{y+z}-\sum_{cyc}\frac{z^2-x^2}{y+z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2-y^2}{y+z}-\sum_{cyc}\frac{x^2-y^2}{x+z}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2(x+y)}{(y+z)(x+z)} \ge 0$$

Đây là điều hiển nhiên đúng. Vậy bất đẳng thức được chứng minh hoàn toàn.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z.$.

**Bài 28.**

$a,b,c > 0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{4a(b^2+c^2)}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)} \le 3$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc} \frac{4a(b^2+c^2)}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)} - \sum_{cyc} \frac{2a(b+c)^2}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)} \le 3 - \sum_{cyc} \frac{2a(b+c)^2}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{2a(b-c)^2}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)} \le \sum_{cyc} \frac{(a-b)^2+(a-c)^2}{2a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 \left( \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} - \frac{2c}{(a+b)(a^2+b^2+2c^2)} \right) \ge 0$$

Đặt

$$S_a = \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{2a}{(b+c)(2a^2+b^2+c^2)}$$

$$S_b = \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{2b}{(c+a)(a^2+2b^2+c^2)}$$

$$S_c = \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} - \frac{2c}{(a+b)(a^2+b^2+2c^2)}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$.

Ta có

$$S_b = \frac{1}{2a^2+b^2+c^2} + \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} - \frac{2b}{(c+a)(a^2+2b^2+c^2)}$$

$$\geq \frac{1}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{2b}{a}.\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}$$
$$=\left(\frac{1}{2a^2+b^2+c^2}-\frac{b}{a}.\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}\right)+\left(\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{b}{a}.\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}\right)$$
$$=\frac{(a-b)(a^2+b^2+c^2-ab)}{a(2a^2+b^2+c^2)(a^2+2b^2+c^2)}+\left(\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{b}{a}.\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}\right)$$
$$\geq \frac{1}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{b}{a}.\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}$$
$$\geq \frac{1}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}$$
$$\geq 0$$

$$S_c=\frac{1}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}-\frac{2c}{(a+b)(a^2+b^2+2c^2)}$$
$$\geq \frac{1}{2a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{a^2+2b^2+c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}$$
$$\geq \frac{4}{3a^2+3b^2+2c^2}-\frac{1}{a^2+b^2+2c^2}$$
$$=\frac{a^2+b^2+6c^2}{(a^2+b^2+2c^2)(3a^2+3b^2+2c^2)}$$
$$>0$$

Do đó $S_b, S_c \geq 0$.

Ta lại có

$$\frac{S_a}{a^2}+\frac{S_b}{b^2}=\frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)}+\frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)}-\frac{2}{a(b+c)(2a^2+b^2+c^2)}+$$
$$+\frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)}+\frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)}-\frac{2}{b(c+a)(a^2+2b^2+c^2)}$$
$$\geq \frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)}+\frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)}-\frac{2}{ab(2a^2+b^2+c^2)}+$$
$$+\frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)}+\frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)}-\frac{2}{ab(a^2+2b^2+c^2)}$$
$$=\left(\frac{1}{a^2(a^2+2b^2+c^2)}+\frac{1}{b^2(a^2+b^2+2c^2)}-\frac{2}{ab(a^2+2b^2+c^2)}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{a^2(a^2+b^2+2c^2)}+\frac{1}{b^2(2a^2+b^2+c^2)}-\frac{2}{ab(2a^2+b^2+c^2)}\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow a^2S_b+b^2S_a\geq 0.$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 29.**

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$a^2+b^2+c^2+\frac{3\sqrt{3}}{4}.abc\geq\frac{5}{4}$$

***Chứng minh.***

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$4(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)+3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq 5(ab+bc+ca)^2$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{sym}a^3b-5\sum_{cyc}a^2b^2-6(a+b+c)abc+3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq 0$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{5}{2}.\sum_{sym}a^3b\geq 5\sum_{cyc}a^2b^2$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{3}{2}.\sum_{sym}a^3b+3abc\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq 6abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{sym}a^3b+2abc\sqrt{3(ab+bc+ca)}\geq 4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 2abc\left(a+b+c-\sqrt{3(ab+bc+ca)}\right)\leq\sum_{sym}a^3b-2abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc.\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}\leq\sum_{cyc}(ab+ac)(b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(ab+ac-\frac{abc}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}\right)\geq 0$$

Điều này rõ ràng đúng vì

$$\frac{abc}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} < \min\{ab,bc,ca\}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 30. (Vasile Cirtoaje)**

$a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a+bc} \geq \frac{3}{2}$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$2\sum_{cyc}a(b+ca)(c+ab) \geq 3(a+bc)(b+ca)(c+ab)$$

$$\Leftrightarrow 3abc+\sum_{cyc}a^2b^2 \geq 3a^2b^2c^2+abc\left(\sum_{cyc}a^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 3abc+\frac{1}{2}.\sum_{cyc}c^2(a-b)^2 \geq 3a^2b^2c^2+abc\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}a\right)$$

$$\Leftrightarrow 9abc+\frac{3}{2}.\sum_{cyc}c^2(a-b)^2 \geq 9a^2b^2c^2+abc\left(\sum_{cyc}(a-b)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(abc^2+\frac{3c^2}{2}-\frac{abc}{2}\right) \geq 0$$

Đặt $S_a=a^2bc+\frac{3a^2}{2}-\frac{abc}{2}, S_b=ab^2c+\frac{3b^2}{2}-\frac{abc}{2}, S_c=abc^2+\frac{3c^2}{2}-\frac{abc}{2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_a>0$.

Ta có

$$S_b > \frac{3b^2}{2}-\frac{abc}{2}=\frac{b}{2}.(3b-ac)>0$$

$$S_b+S_c > \frac{3(b^2+c^2)}{2}-abc \geq 3bc-abc=bc(3-a)>0$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 31. (Nguyễn Anh Cường)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}{2a^2+bc}\ge 6$$

***Chứng minh.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\left(\frac{2(a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca)}{2a^2+bc}-4\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{-6a^2+2b^2+2c^2+2ab-2bc+2ca}{2a^2+bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(3a-b+2c)(c-a)-(3a+2b-c)(a-b)}{2a^2+bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(3a-b+2c)(c-a)}{2a^2+bc}-\sum_{cyc}\frac{(3a+2b-c)(a-b)}{2a^2+bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(2a+3b-c)(a-b)}{2b^2+ca}-\sum_{cyc}\frac{(3a+2b-c)(a-b)}{2a^2+bc}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(4a^2+4b^2+c^2+6ab-5bc-5ca)(2c^2+ab)\ge 0$$

Đặt

$$S_a=(a^2+4b^2+4c^2+6bc-5ab-5ca)(2a^2+bc)$$
$$S_b=(4a^2+b^2+4c^2+6ca-5ab-5bc)(2b^2+ca)$$
$$S_c=(4a^2+4b^2+c^2+6ab-5ac-5bc)(2c^2+ab)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_b,S_c\ge 0$.

Ta có

$$a^2S_b+b^2S_a=a^2(4a^2+b^2+4c^2+6ca-5ab-5bc)(2b^2+ca)+$$
$$+b^2(a^2+4b^2+4c^2+6bc-5ab-5ca)(2a^2+bc)\ge 0$$

Vì

$$a^2(2b^2+ca)\ge b^2(2a^2+bc)>0$$

và

$$(4a^2+b^2+4c^2+6ca-5ab-5bc)+(a^2+4b^2+4c^2+6bc-5ab-5ca)\ge 0$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b, c=0$ và các hoán vị.

**Bài 32.**

$a,b,c>0$ thỏa $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{2+b^2+c^2}\ge\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

***Chứng minh.***

Áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{2+b^2+c^2}=\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a+ab^2+ac^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{2(a+b+c)+\sum_{sym}a^2b}=\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)-3abc}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3(a+b+c)-3abc}\ge\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2+9\sqrt{3}abc\ge 9\sqrt{3}(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^2\sqrt{ab+bc+ca}+9\sqrt{3}abc\ge 9\sqrt{3}(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}\left(a+b+c-\sqrt{ab+bc+ca}\right)\ge$$

$$\ge\sqrt{3}((a+b+c)(ab+bc+ca)-9abc)$$

$$\Leftrightarrow\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}.\left(\sum_{cyc}(a-b)^2\right)\ge\sqrt{3}\left(\sum_{cyc}c(a-b)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}c\right)\ge 0$$

Đặt

$$S_a=\frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}}-\sqrt{3}a$$

$$S_b = \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}b$$

$$S_c = \frac{8(a+b+c)\sqrt{ab+bc+ca}}{a+b+c+\sqrt{3(ab+bc+ca)}} - \sqrt{3}c$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_b, S_c \geq 0$.

Ta chứng minh

$$a^2S_b + b^2S_a \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4(a^2b + b^2c + ab^2 + ca^2 + a^3 + b^3)\sqrt{ab+bc+ca} \geq$$

$$\geq \sqrt{3}\left(a+b+c\right)\left(a^2b+ab^2\right) + 3(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c + ca^2 + a^3 + b^3)\sqrt{ab+bc+ca} +$$

$$+(a^2b+ab^2)\sqrt{ab+bc+ca} \geq \sqrt{3}(a+b+c)(a^2b+ab^2)$$

Ta dễ dàng chứng minh được

$$4(a^3+b^3)\sqrt{ab} + (a^2b+ab^2)\sqrt{ab} > \sqrt{3}(a+b)(a^2b+ab^2) \qquad (1)$$

Và

$$4a^2c\sqrt{ab+bc+ca} > \sqrt{3}c(a^2b+ab^2) \qquad (2)$$

Từ (1) và (2), ta suy ra $a^2S_b + b^2S_a \geq 0$.

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta có ngay đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

**Bài 33.**

$x, y, z > 0$ thỏa $xyz = 1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{y+z}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} + 3$$

***Chứng minh.***

Đặt $x = a^2, y = b^2, z = c^2$ $(a, b, c > 0)$ thì $abc = 1$ và bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2}{a}\ge a+b+c+3$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2}{a}-2a-2b-2c\ge 3-a-b-c$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có $0\ge 3-a-b-c$. Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2}{a}-2a-2b-2c\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-2a^2}{a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{c^2-a^2}{a}-\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{b}-\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b)}{ab}\ge 0 \text{ (ñuìng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

**Bài 34.(Vasile Cirtoaje)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}\ge 2$$

***Chứng minh.***

*** Bổ đề.** Nếu $a,b,c,x,y,z$ là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$ và $x\ge y\ge z$ (hoặc $x\le y\le z$) thì

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

*Chứng minh.*

**+ Trường hợp 1.** $x\ge y\ge z\ge 0$.

Ta có

$$a-c\ge b-c\ge 0 \text{ (do } a\ge b\ge c)$$
$$\Rightarrow x(a-c)\ge y(b-c)\ge 0$$

Mà $a-b\ge 0$ nên

$$x(a-c)(a-b)\ge y(b-c)(a-b)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x(a-c)(a-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $z\ge 0$ nên

$$z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

**+ Trường hợp 2.** $0\le x\le y\le z$.

Ta có

$$a-c\ge a-b\ge 0 \text{ (do } a\ge b\ge c)$$
$$\Rightarrow z(a-c)\ge y(a-b)\ge 0$$

Mà $b-c\ge 0$ nên

$$z(a-c)(b-c)\ge y(a-b)(b-c)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow z(c-a)(c-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $x\ge 0$ nên

$$x(a-c)(a-b)\ge 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta.

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, ta có

$$0<b^2+bc+c^2\le a^2+ac+c^2\le a^2+ab+b^2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{b^2+bc+c^2}\ge \frac{1}{a^2+ac+c^2}\ge \frac{1}{a^2+ab+b^2}>0$$

Áp dụng Bổ đề trên với $x=\dfrac{1}{b^2+bc+c^2}, y=\dfrac{1}{a^2+ac+c^2}, z=\dfrac{1}{a^2+ab+b^2}$ ta suy ra

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{b^2+bc+c^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+bc+c^2}\ge \sum_{cyc}\frac{ab+ac-bc}{b^2+bc+c^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{b^2+bc+c^2}\ge \sum_{cyc}\frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2}$$

Do đó, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2}\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{ab+ac}{b^2+bc+c^2}-\frac{2a}{a+b+c}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{b^2+bc+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum_{cyc}\frac{ca(c-a)}{b^2+bc+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{b^2+bc+c^2}-\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{a^2+ac+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2(a+b+c)}{(b^2+bc+c^2)(a^2+ac+c^2)}\ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 35.**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\le \sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\le \frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

***Chứng minh.***

Trước tiên ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}\le \sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b} \qquad (*)$$

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}-\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}=$$

$$=\sum_{cyc}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{(a+b)}{2}\right)-\left(\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}-a-b-c\right)$$

$$=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}-\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{a+b}-\frac{2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}\right)$$

$$\geq\frac{1}{2}\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{a+b}-\frac{1}{a+b+c}\right)\text{ (theo bñt Bunhiacopxki)}$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ (*) đúng.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Tiếp theo, ta chứng minh bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\leq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

**+ Cách 1.**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\leq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\right)\leq 3(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a^2+b^2)}{a+b}\leq a^2+b^2+c^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(c^2-\frac{c(a^2+b^2)}{a+b}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{ca(c-a)}{a+b}-\sum_{cyc}\frac{bc(b-c)}{a+b}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{b+c}-\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{c+a}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2}{(b+c)(c+a)}\ge 0 \text{ (ñuìng)}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

**+ Cách 2.**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{a+b}\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b}-\frac{(a+b)}{2}\right)\le\frac{3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}\le\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{2}{a+b+c}-\frac{1}{a+b}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b-c)}{a+b}\ge 0$$

Đặt $S_a=\dfrac{b+c-a}{b+c}, S_b=\dfrac{c+a-b}{c+a}, S_c=\dfrac{a+b-c}{a+b}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_b,S_c\ge 0$.

Ta có

$$b^2S_a+a^2S_b=a^2+b^2-\frac{a^2b}{a+c}-\frac{ab^2}{b+c}>a^2+b^2-\frac{a^2b}{a}-\frac{ab^2}{b}=(a-b)^2\ge 0$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$ hoặc $a=b,c=0$ và các hoán vị.

**Bài 36. (Hojoo Lee)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+2bc}\ge 1\ge \sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc}$$

***Chứng minh.***

* *Chứng minh*

$$1\ge \sum_{cyc}\frac{bc}{a^2+2bc} \qquad (*)$$

*** Bổ đề.** Nếu $a,b,c,x,y,z$ là sáu số thực không âm thỏa mãn điều kiện $a\ge b\ge c$ và $x\ge y\ge z$ (hoặc $x\le y\le z$) thì

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

*Chứng minh.*

**+ Trường hợp 1.** $x\ge y\ge z\ge 0$.

Ta có

$$a-c\ge b-c\ge 0 \text{ (do } a\ge b\ge c)$$
$$\Rightarrow x(a-c)\ge y(b-c)\ge 0$$

Mà $a-b\ge 0$ nên

$$x(a-c)(a-b)\ge y(b-c)(a-b)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x(a-c)(a-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $z\ge 0$ nên

$$z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

**+ Trường hợp 2.** $0\le x\le y\le z$.

Ta có

$$a-c\ge a-b\ge 0 \text{ (do } a\ge b\ge c)$$
$$\Rightarrow z(a-c)\ge y(a-b)\ge 0$$

Mà $b-c\ge 0$ nên

$$z(a-c)(b-c)\ge y(a-b)(b-c)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow z(c-a)(c-b)+y(b-c)(b-a)\ge 0$$

Mặt khác, do $a\ge b\ge c$ và $x\ge 0$ nên

$$x(a-c)(a-b)\ge 0$$

Do đó

$$x(a-b)(a-c)+y(b-c)(b-a)+z(c-a)(c-b)\ge 0$$

Bổ đề được chứng minh hoàn toàn.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$(*)\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{bc}{ab+bc+ca}-\frac{bc}{a^2+2bc}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{bc(a-b)(a-c)}{(ab+bc+ca)\left(a^2+2bc\right)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{abc}{ab+bc+ca}.\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc}\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $a\ge b\ge c$. Khi đó, ta có

$$a^3+2abc\ge b^3+2abc\ge c^3+2abc>0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c^3+2abc}\ge\frac{1}{b^3+2abc}\ge\frac{1}{a^3+2abc}>0$$

Áp dụng bổ đề trên với $x=\dfrac{1}{a^3+2abc},y=\dfrac{1}{b^3+2abc},z=\dfrac{1}{c^3+2abc}$ ta suy ra được

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a^3+2abc}\ge 0$$

Vậy (*) đúng.

* *Chứng minh*

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a^2+2bc}\ge 1 \qquad (**)$$

Ta có

$$(**)\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{a^2+2bc}-\frac{a}{a+b+c}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{a(ab+ac-2bc)}{a^2+2bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ca(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{ab(c-a)}{a^2+2bc} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{ca(a-b)}{a^2+2bc} - \sum_{cyc} \frac{bc(a-b)}{b^2+2ca} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (a-b)^2 c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab) \geq 0$$

Đặt

$$S_a = a(2ab+2ca-bc)(a^2+2bc)$$
$$S_b = b(2ab+2bc-ca)(b^2+2ca)$$
$$S_c = c(2bc+2ca-ab)(c^2+2ab)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \geq b \geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_a, S_b \geq 0$.

Dễ thấy $b(b^2+2ca) \geq c(c^2+2ab) \geq 0$ nên

$$\begin{aligned} vS_b + S_c &\geq c(c^2+2ab)(2ab+2bc-ca+2bc+2ca-ab) \\ &= c(c^2+2ab)(ab+4bc+ca) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Do đó, áp dụng tiêu chuẩn 2, ta suy ra ngay đpcm.

**Bài 37. (Hojoo Lee)**

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b+c} \geq a+b+c$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$\sum_{cyc} \frac{a^2+bc}{b+c} \geq a+b+c$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2+bc}{b+c}-\frac{(b+c)}{2}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2-b^2-c^2}{b+c}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{b+c}-\sum_{cyc}\frac{c^2-a^2}{b+c}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{b+c}-\sum_{cyc}\frac{a^2-b^2}{a+c}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b)}{(b+c)(a+c)}\geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài 38. (Gabriel Dospinescu)**

$x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3x+1}+\frac{3}{x+y+z+1}\geq \sum_{sym}\frac{1}{2x+y+1}$$

***Chứng minh.***

Đặt $a=x+\frac{1}{3}, b=y+\frac{1}{3}, c=z+\frac{1}{3}$.

Khi đó, bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{1}{3a}+\frac{3}{a+b+c}\geq \sum_{sym}\frac{1}{2a+b}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1}{3a}+\frac{1}{a+b+c}-\frac{1}{2a+b}-\frac{1}{2a+c}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(4a+b+c)((2a+b)(2a+c)-3a(a+b+c))}{a(a+b+c)(2a+b)(2a+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+b)}-\sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a-c)}{a(2a+b)}-\sum_{cyc}\frac{(b-a)(b-c)}{b(a+2b)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2.\frac{2bc+2ca-ab}{ab(2a+b)(a+2b)}\geq 0$$

Đặt $S_a = \dfrac{2ab+2ca-bc}{bc(2b+c)(b+2c)}, S_b = \dfrac{2ab+2bc-ca}{ca(2a+c)(a+2c)}, S_c = \dfrac{2bc+2ca-ab}{ab(2a+b)(a+2b)}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, dễ thấy $S_a, S_b \ge 0$.

Do $b \ge c$ nên

$$b(2a+b)(a+2b) \ge c(2a+c)(a+2c) > 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{c(2a+c)(a+2c)} \ge \frac{1}{b(2a+b)(a+2b)} > 0$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow S_b + S_c &= \frac{2ab+2bc-ca}{ca(2a+c)(a+2c)} + \frac{2bc+2ca-ab}{ab(2a+b)(a+2b)}\\ &\ge \frac{2ab+2bc-ca}{ba(2a+b)(a+2b)} + \frac{2bc+2ca-ab}{ab(2a+b)(a+2b)}\\ &= \frac{ab+4bc+ca}{ba(2a+b)(a+2b)}\\ &\ge 0\end{aligned}$$

Do đó áp dụng tiêu chuẩn 2, ta có ngay đpcm.

**Bài 39. (Iran 1996)**

$a,b,c > 0$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2} + \frac{1}{(b+c)^2} + \frac{1}{(c+a)^2}\right) \ge \frac{9}{4}$$

***Chứng minh.***

*** Cách 1.**

Không mất tính tổng quát giả sử $c \ge b \ge a > 0$.

Đặt $\begin{cases} b+c=2x \\ c+a=2y \\ a+b=2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-x+y+z \\ b=x-y+z \\ c=x+y-z \end{cases} \Rightarrow x,y,z$ là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Do $c \ge b \ge a > 0$ nên $x \ge y \ge z > 0$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4y^2}+\frac{1}{4z^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow(2xy+2yz+2zx-x^2-y^2-z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)\geq 9$$

$$\sum_{cyc}(x-y)^2\left(\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}\right)\geq 0$$

Đặt $S_x=\frac{2}{yz}-\frac{1}{x^2}, S_y=\frac{2}{zx}-\frac{1}{y^2}, S_z=\frac{2}{xy}-\frac{1}{z^2}$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\geq 0$$

Do $x\geq y\geq z>0$ và $y+z>x$ nên $S_x\geq 0$ và $S_y\geq 0$

Ta chứng minh

$$y^2S_y+z^2S_z\geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^3+z^3\geq xyz$$

Mà $y+z>x$ nên ta chỉ cần chứng minh

$$y^3+z^3\geq(y+z)yz$$

$$\Leftrightarrow(y-z)^2(y+z)\geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

*** Cách 2.**

**Bổ đề.** Nếu $a,b,c,x,y,z$ là 6 số thực không âm thỏa $a\geq b\geq c$ và $x\leq y\leq z$ thì

$$x(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2)+y(c-a)^2(3ca+ab+bc-b^2)+$$
$$+z(a-b)^2(3ab+bc+ca-c^2)\geq 0$$

*Chứng minh Bổ đề.*

Do $a\geq b\geq c$ nên

$$3ca+ab+bc-b^2\geq 0$$

$$3ab+bc+ca-c^2\geq 0$$

Do đó

+ Nếu $3bc+ca+ab-a^2\geq 0$ thì bổ đề hiển nhiên đúng.

+ Nếu $3bc+ca+ab-a^2 \le 0$ thì

$$(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2) \le 0$$
$$\Rightarrow x(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2) \ge y(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2)$$

Lại có $z \ge y$ nên

$$z(a-b)^2(3ab+bc+ca-c^2) \ge y(a-b)^2(3ab+bc+ca-c^2)$$

Do đó

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} x(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2) &\ge y\left(\sum_{cyc}(b-c)^2(3bc+ca+ab-a^2)\right)\\ &= 4y\left(\sum_{cyc} ab(a-b)^2\right)\\ &\ge 0\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán của ta.

Ta có

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{4(ab+bc+ca)}{(a+b)^2}-3\right) \ge 0\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2}-\frac{(3a+c)(b-c)}{(a+b)^2}\right) \ge 0\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2}-\sum_{cyc}\frac{(3a+c)(b-c)}{(a+b)^2} \ge 0\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(3a+b)(c-a)}{(a+b)^2}-\sum_{cyc}\frac{(3a+c)(a-b)}{(a+c)^2} \ge 0\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2.\frac{3ab+bc+ca-c^2}{(b+c)^2(a+c)^2} \ge 0\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)^2(3ab+bc+ca-c^2) \ge 0\end{aligned}$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a \ge b \ge c$. Khi đó, ta có

$$(a+b)^2 \ge (c+a)^2 \ge (b+c)^2 > 0$$

Áp dụng Bổ đề trên với $z=(a+b)^2, y=(c+a)^2, x=(b+c)^2$

ta suy ra được

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)^2(3ab+bc+ca-c^2)\geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

**Bài 40. (Komal)**

$a,b,c>0$ thỏa $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}\geq\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

***Chứng minh.***

Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}\geq\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{3abc}{a+b+c}\geq\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca-\frac{9abc}{a+b+c}\geq\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}-\frac{6abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{a+b+c}\geq\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2(c^2+bc+ca-2ab)}{(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}c(a-b)^2(a^2+b^2+2ab-bc-ca)\geq 0$$

Đặt

$$S_a=a(b^2+c^2+2bc-ca-ab)$$

$$S_b=b(c^2+a^2+2ca-ab-bc)$$

$$S_c=c(a^2+b^2+2ab-bc-ca)$$

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Không mất tính tổng quát giả sử $a\geq b\geq c$. Khi đó, dễ thấy $S_b,S_c\geq 0$.

Ta có

$$a^2S_b+b^2S_a=ab((a-b)^2(a+b)+2c(a^2+b^2-ab)+c(a^2+b^2))>0$$

Từ đây, áp dụng tiêu chuẩn 4, ta suy ra đpcm.

## II. Bài tập đề nghị.

Mời các bạn giải các bài toán sau để làm quen với phương pháp trên và nếu có thể các bạn hãy thử giải các bài toán này bằng phương pháp khác nhé!

Bài 1.

a) (Old and New Inequalities) $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+b}{b+c}\geq 2$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) $a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+5b}{b+c}\geq 8$$

c) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số $k$ lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+kb}{b+c}\geq\frac{3k+1}{2}$$

Bài 2. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}\geq\frac{21}{4}+\frac{59(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{4(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

b) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số $k$ lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+5bc}{(b+c)^2}\geq\frac{21}{4}+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Bài 3. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+2bc}{b+c}\geq\frac{3(a+b+c)}{2}$$

b) Với những điều kiện như trên, hãy tìm hằng số $k$ lớn nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+kbc}{b+c}\ge\frac{(k+1)(a+b+c)}{2}$$

Bài 4. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}-2(a^2+b^2+c^2)\ge\sqrt{3}-2$$

Bài 5. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ lớn nhất sao cho bất đẳng thức sau đúng

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge 9+k$$

Bài 6. ( Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$4(a^4+b^4+c^4)+3abc(a+b+c)\ge 7(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Bài 7. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b+c}\ge\frac{3(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 8. (Mathnfriends)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{21}{2(a^2+b^2+c^2)+5(ab+bc+ca)}$$

Bài 9. (Olympic 30 - 4 - 2006)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+(b+c)^2}\le\frac{6}{5}$$

Bài 10. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{a+2b}\geq\sum_{cyc}\frac{a^2}{2a+b}$$

Bài 11. (Stronger than Vietnam TST 2006 – Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $x,y,z\in[1,2]$. Chứng minh rằng

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+\frac{9(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}$$

b) Với các điều kiện như trên, hãy tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+\frac{k(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}$$

Bài 12. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2}{a(b+c)}-\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 13. (Diendantoanhoc)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+ab+b^2}\geq\frac{9}{(a+b+c)^2}$$

Bài 14. (Gabriel Dospinescu)

$a,b,c>0$ . Chứng minh rằng

$$27+\left(2+\frac{a^2}{bc}\right)\left(2+\frac{b^2}{ca}\right)\left(2+\frac{c^2}{ab}\right)\geq 6(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Bài 15. (Belarus 1997)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq\sum_{cyc}\frac{a+c}{b+c}$$

Bài 16. (Belarus 1998)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

Bài 17. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b}\geq\sum_{cyc}\frac{b+c}{a+c}$$

Bài 18. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\geq 4\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)$$

Bài 19. (Mildorf)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$2\sum_{cyc}a^6+16\sum_{cyc}a^3b^3\geq 9\sum_{cyc}a^2b^2(a^2+b^2)$$

Bài 20. (Vasile Cirtoaje)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{7(a^2+b^2+c^2)}{4b^2-bc+4c^2}\geq 9$$

Bài 21. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}\geq\frac{5}{2}$$

Bài 22. (Diendantoanhoc)

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-bc+1}\leq 3$$

Bài 23. (Japan 2004)

$a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$2\left(\sum_{cyc}\frac{a}{b}\right)\ge\sum_{cyc}\frac{1+a}{1-a}$$

Bài 24. (Vasile Cirtoaje)

$a,b,c>0$, đặt $E(a,b,c)=\sum_{cyc}a(a-b)(a-c)$. Chứng minh rằng

a) $(a+b+c)E(a,b,c)\ge\sum_{cyc}ab(a-b)^2$

b) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)E(a,b,c)\ge\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab$

Bài 25. (Vasile Cirtoaje)

$x,y,z>0, xyz=1$. Chứng minh rằng

$$(x+y)(y+z)(z+x)+7\ge 5(x+y+z)$$

Bài 26. (Vasile Cirtoaje)

a) $x,y,z>0$. Chứng minh rằng

$$3\left(\sum_{cyc}x^4-\sum_{cyc}x^3y\right)\ge\sum_{cyc}z^2(x-y)^2$$

b) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên cũng đúng cho $x,y,z\in\mathbb{R}$.

Bài 27. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{a^2-bc+1}\ge\frac{1}{a+b+c}$$

Bài 28. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}\ge\frac{9}{2}$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+kbc}{b^2+c^2}\ge\frac{3(k+1)}{2}$$

c) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}\ge\frac{9}{2}+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}$$

Bài 29. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b+c}\ge\sum_{cyc}\frac{2a}{3a^2+bc}$$

Bài 30.

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+c^2}\ge\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

Bài 31. (VMO 2006B)

$a,b,c>0,abc=1$. Tìm $k$ max sao cho

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+3k\ge(k+1)(a+b+c)$$

Bài 32. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+2bc}\ge 4$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c)^2}{a^2+2bc}\ge 4+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

Bài 33.

a) (Mathlinks) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\le\frac{1}{3}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}\le\frac{1}{3}-\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(2a+b)(2b+c)(2c+a)(2a+c)(2c+b)(2b+a)}$$

Bài 34. (Mathinks)

$a,b,c>0$ và $p\ge 3+\sqrt{7}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{pa^2+bc}\ge\frac{9}{(p+1)(ab+bc+ca)}$$

Bài 35. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $p>-2$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{ab+(p-1)bc+ca}{b^2+pbc+c^2}\ge\frac{3(p+1)}{p+2}$$

Bài 36. (Stronger than Schur - Nguyễn Anh Cường)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$a^3+b^3+c^3+3abc\ge ab\sqrt{2(a^2+b^2)}+bc\sqrt{2(b^2+c^2)}+ca\sqrt{2(c^2+a^2)}$$

Bài 37. (JBMO 2002)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2}\ge\sum_{cyc}\frac{a^2}{b}$$

Bài 38. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{a^2+b^2+3c^2}\le\frac{3}{5}$$

Bài 39. (Phạm Kim Hùng)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}a^3b\ge 2\left(\sum_{cyc}ab^3\right)$$

b) Chứng minh rằng bất đẳng thức trên cũng đúng cho $a,b,c\in\mathbf{R}$.

Bài 40. (Diendantoanhoc)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a^4+\sqrt{2}\left(\sum_{cyc} a^3b\right)\ge\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sum_{cyc} ab^3\right)$$

Bài 41. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+3bc}{b^2+bc+c^2}\ge 5$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+kbc}{b^2+bc+c^2}\ge k+1$$

c) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+3bc}{b^2+bc+c^2}\ge 5+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+ab+b^2)(b^2+bc+c^2)(c^2+ca+a^2)}$$

Bài 42. (Vasile Cirtoaje)

$a,b,c>0$, $p\in\mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}(a-pb)(a-pc)(a-b)(a-c)\ge 0$$

Bài 43. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}\ge 3+\frac{(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca)}{abc(a+b+c)}$$

Bài 44. (Diendantoanhoc)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{\sum_{cyc}\frac{b+c}{a}}+\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}\ge\sqrt{6}+1$$

Bài 45. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{ab+bc+ca}{ab+bc+ca+3a^2}\geq\frac{3}{2}$$

Bài 46. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $a+b+c=3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geq a^2+b^2+c^2$$

Bài 47. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^2+bc}{a^2+(b+c)^2}\leq\frac{18}{5}.\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}$$

Bài 48. (Mathnfriend)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}+\frac{15}{4}.\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Bài 49. (Mathnfriend)

$a,b,c$ là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}+\frac{47}{4}.\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Bài 50. (Vasile Cirtoaje).

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-4a^2}{a(b+c)}+3\geq 0$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{b^2+c^2-ka^2}{a(b+c)}+\frac{3(k-2)}{2}\geq 0$$

Bài 51. (Toán Học Tuổi Trẻ 1998)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\ge\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\ge 2-\frac{1}{2}.\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 52. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\left(\frac{1}{a}-2\right)^2\ge\frac{8(a^2+b^2+c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

Bài 53. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$2\sum_{cyc}a^3+9\sum_{cyc}a^2b+\left(\sum_{cyc}a\right)^3\ge 12\left(\sum_{cyc}a^2\right)\left(\sum_{cyc}a\right)$$

Bài 54. (Mathlinks)

$a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{abc}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}\ge\frac{10}{ab+bc+ca}$$

Bài 55. (Mathnfriend)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{2a^2+b^2+c^2}\ge\frac{a+b+c}{4}$$

Bài 56. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+2bc}\ge\frac{2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

Bài 57. (Mathlinks)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}a\sqrt{a^2+2bc}\ge\sqrt{3}(ab+bc+ca)$$

b) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2+3bc} \ge 2(ab+bc+ca)$$

c) $a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc} a\sqrt{a^2+kbc} \ge \sqrt{k+1}(ab+bc+ca)$$

Bài 58.

$a,b,c>0$ và $a+b+c=1$. Chứng minh rằng

$$ab+bc+ca+\frac{5}{2}.\left((a+b)\sqrt{ab}+(b+c)\sqrt{bc}+(c+a)\sqrt{ca}\right) \le 2$$

Bài 59.

a) (Mathlinks) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{b+c}{2a^2+bc} \ge \frac{6}{a+b+c}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$(a+b+c)\left(\sum_{cyc} \frac{b+c}{2a^2+bc}\right) \ge 6+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(2a^2+bc)(2b^2+ca)(2c^2+ab)}$$

Bài 60. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a(b+c)} \le \sum_{cyc} \frac{bc}{a^3(b+c)}$$

Bài 61. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$4\left(\sum_{cyc} \frac{a^2}{b+c}\right)^2 \ge 3(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 62. (Japan 1997)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{(b+c-a)^2}{a^2+(b+c)^2}\ge\frac{3}{5}$$

Bài 63. (USA 2003)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}\le 8$$

Bài 64. (Poland 1992)

$a,b,c\in\mathbf{R}$. Chứng minh rằng

$$(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2\ge(a^2+b^2-c^2)(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)$$

Bài 65. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\sqrt{11a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{11b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{11c^2+ab}}\ge\frac{3}{2\sqrt{ab+bc+ca}}$$

Bài 66.

a) (Mathinks) $a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{5}{2}$$

b) (Võ Quốc Bá Cẩn) Với các điều kiện như trên, hãy tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{1+a^2b^2}{(a+b)^2}+\frac{1+b^2c^2}{(b+c)^2}+\frac{1+c^2a^2}{(c+a)^2}\ge\frac{5}{2}+\frac{k(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a+b)^2(b+c)^2(c+a)^2}$$

Bài 67. (Phạm Kim Hùng)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{abc}{2(a^3+b^3+c^3)}\ge\frac{5}{3}$$

Bài 68. (Phạm Kim Hùng)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{54abc}{(a+b+c)^3}\ge 5$$

Bài 69. (Phạm Kim Hùng)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^4+b^4+c^4}{ab+bc+ca}+\frac{3abc}{a+b+c}\ge \frac{2}{3}.(a^2+b^2+c^2)$$

Bài 70. (Phạm Kim Hùng)

$a,b,c>0$ và $ab+bc+ca=1$, $k\ge 2+\sqrt{3}$. Chứng minh rằng

$$\frac{1+bc}{ka^2+bc}+\frac{1+ca}{kb^2+ca}+\frac{1+ab}{kc^2+ab}\ge \frac{12}{k+1}$$

Bài 71. (Võ Quốc Bá Cẩn)

a) $a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{4b^2-bc+4c^2}\ge \frac{9}{7(a^2+b^2+c^2)}$$

b) Với các điều kiện như trên, tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{1}{b^2+kbc+c^2}\ge \frac{9}{(k+2)(a^2+b^2+c^2)}$$

Bài 72. (VMO 1991)

$x\ge y\ge z>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{x^2y}{z}+\frac{y^2z}{x}+\frac{z^2x}{y}\ge x^2+y^2+z^2$$

Bài 73. (Mathinks)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}+\frac{k(ab+bc+ca)}{a^2+b^2+c^2}\ge \frac{3}{2}+k$$

Bài 74.

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{abc}\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)+(a+b+c)^2\ge 4\sqrt{3abc(a+b+c)}$$

Bài 75. (Phạm Kim Hùng)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}+\frac{k(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\ge\frac{3}{8}+\frac{k}{3}$$

Bài 76. (Vasile Cirtoaje)

$a,b,c,k>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{ab+(k-3)bc+ca}{(b-c)^2+kbc}\ge\frac{3(k-1)}{k}$$

Bài 77. (Võ Quốc Bá Cẩn)

Chứng minh rằng với mọi $a,b,c>0,k\ge 1$ ta luôn có

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+kbc+c^2}\ge\frac{6}{k+2}$$

Bài 78. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\sum_{cyc}\frac{a(2a+b+c)}{ka^2+bc}\ge\frac{12}{k+1}$$

Bài 79. (Toán Học Tuổi Trẻ 2002)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$(a+b+c)^3(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\le 27a^2b^2c^2$$

Bài 80. (Manlio Marangelli)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$3(a^2b+b^2c+c^2a)(ab^2+bc^2+ca^2)\ge abc(a+b+c)^3$$

Bài 81. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{a^2+2bc}+\frac{c^2+a^2-b^2}{b^2+2ca}+\frac{a^2+b^2-c^2}{c^2+2ab}\ge 1$$

Bài 82. (Toán Học Tuổi Trẻ 2005)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}$$

Bài 83. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)}+\frac{kabc}{a^3+b^3+c^3}\ge\frac{8}{9}+\frac{k}{3}$$

Bài 84. (Võ Quốc Bá Cẩn)

$a,b,c>0$. Tìm hằng số $k$ tốt nhất cho bất đẳng thức

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+\frac{kabc}{a^3+b^3+c^3}\ge\frac{3}{2}+\frac{k}{3}$$

Bài 85. (Mathlinks)

$a,b,c>0$. Chứng minh rằng

$$\sum_{cyc}\frac{1}{5a^2-ab+5b^2}\ge\frac{1}{a^2+b^2+c^2}$$

# MỘT TÌM TÒI NHỎ VỀ BẤT ĐẲNG THỨC

Vo Quoc Ba Can

Bat ñang thöc la mot trong nhöng lónh vöc hay, kho va loi cuon nhat cua toan hoc. Ban co the de dang kiem chöng ñöôc ñieu nay qua cac trang web toan hoc, trong forum bat ñang thöc cua cac trang web nay, luon chiem so löông bai viet nhieu nhat. Bai viet sau ñay, toi xin giôi thieu mot phöông phap hay, kha hieu qua ñe chöng minh bat ñang thöc ñoi xöng ba bien ma toi tình cô tìm ñöôc qua viec giai toan. Do trình ño con han hep va ñay chæ la mot tìm toi nho cua toi nen kho long tranh khoi nhöng sai sot, mong ban ñoc thong cam.

Phöông phap nay rat ñôn gian nhöng kha hieu qua va no ña giup toi giai ñöôc kha nhieu bai toan kho ma nhöng phöông phap manh khac nhö S.O.S, don bien… ñanh bat löc.

Xin ñöôc noi sô qua ve cô sô cua phöông phap nay, no ñöôc xay döng hoan toan döa tren 2 Bo ñe rat cô ban sau

* Bo ñe 1. (bat ñang thöc Schur) $\forall a,b,c \ge 0$ thì

$$r \ge \frac{4pq - p^3}{9}$$

trong ño $p = a+b+c, q = ab+bc+ca, r = abc.$

* Bo ñe 2. $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$ thì ton tai cac so thöc $x_0, y_0, x_1, y_1$ sao cho

$$p = a+b+c = 2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1$$
$$q = ab+bc+ca = x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1$$
$$x_0^2y_0 \le r = abc \le x_1^2y_1$$

Ngoai ra, neu $a,b,c \ge 0$ thì $x_0, x_1, y_1 \ge 0$. Trong ño

+ Neu $p^2 \ge 4q$ thì $y_0 \le 0$

+ Neu $p^2 \le 4q$ thì $y_0 \ge 0$

Caùc keát quaû treân chöùng minh töông ñoái ñôn giaûn, caùc baïn neân töï chöùng minh laáy, xem nhö laø baøi taäp.

Ñeå hieåu roõ hôn tính hieäu quaû cuûa phöông phaùp naøy, caùc baïn haõy cuøng theo doõi caùc ví duï sau

Ví duï 1. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c>0$ thoûa $a^2+b^2+c^2=a+b+c$. Chöùng minh raèng

$$ab+bc+ca \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$(ab+bc+ca).\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}\right)^2 \ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$

Do caû 2 veá cuûa baát ñaúng thöùc naøy ñoàng baäc neân khoâng maát tính toång quaùt, ta coù theå giaû söû $a+b+c=1$. Ñaët $q=ab+bc+ca, r=abc \Rightarrow 0 \le q \le \frac{1}{3}$. Khi ñoù, baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$q(1-2q)^2 \ge q^2-2r$$
$$f(r)=18r+9q(4q-1)(q-1) \ge 0 \qquad (*)$$

* Tröôøng hôïp 1. $4q \le 1$ thì (*) hieån nhieân ñuùng.

* Tröôøng hôïp 2. $4q \ge 1$, theá thì theo Boå ñeà 1, ta coù

$$r \ge \frac{4q-1}{9} \ge 0$$

Do ñoù

$$\begin{aligned} f(r) &= 18r+9q(4q-1)(q-1) \ge 2(4q-1)+9q(4q-1)(q-1) \\ &= (4q-1)(2-3q)(1-3q) \ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (*) ñuùng.

$\Rightarrow$ ñpcm.

**Ví duï 2. (Vasile Cirtoaje)**

Cho $a,b,c>0$ thoûa $a+b+c=3$. Chöùng minh raèng

$$P(a,b,c)=\frac{a}{a+bc}+\frac{b}{b+ca}+\frac{c}{c+ab}\ge\frac{3}{2}$$

*Lôøi giaûi.*

Ñaët $q=ab+bc+ca, r=abc \Rightarrow 0\le q\le 3$. Ta coù baát ñaúng thöùc töông ñöông vôùi:

$$3r^2+2r(6-q)-q^2\le 0$$

Töø Boå ñeà 1, ta coù

$$3r^2+2r(6-q)-q^2\le 3(x_1^2y_1)^2+(x_1^2y_1)(6-q)-q^2$$

Do ñoù, ñeå chöùng minh baát ñaúng thöùc ñaõ cho, ta chæ caàn chöùng minh

$$3(x_1^2y_1)^2+(x_1^2y_1)(6-q)-q^2\le 0$$

$$\Leftrightarrow P(x_1,x_1,y_1)\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1+1}+\frac{y_1}{y_1+x_1^2}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1+1}+\frac{y_1}{y_1+\left(\frac{3-y_1}{2}\right)^2}\ge\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y_1+1}+\frac{4y_1}{y_1^2-2y_1+9}\ge\frac{3}{2}$$

$\Leftrightarrow (y_1-1)^2(3-y_1)\ge 0$ (ñuùng)

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$ hoaëc $a=3, b=c\to 0$ vaø caùc hoaùn vò.

**Ví duï 3. (Phaïm Kim Huøng)**

Cho $a,b,c \ge 0$ thoûa $a+b+c=1$. Chöùng minh raèng

$$ab+bc+ca \ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^2+b^2+c^2+16abc)$$

*Lôøi giaûi.*

Ñaët $q=ab+bc+ca, r=abc \Rightarrow \begin{cases} q,r \ge 0 \\ q \le \dfrac{1}{3} \end{cases}$ theá thì theo baát ñaúng thöùc Schur, ta coù

$r \ge \dfrac{4q-1}{9}$. Töø caùch ñaët, ta coù

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2r$$
$$a^2+b^2+c^2=1-2q$$

Do ñoù, baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$q \ge 8(q^2-2r)(16r+1-2q)$$
$$\Leftrightarrow f(r)=8(2r-q^2)(16r+1-2q)+q \ge 0$$

Ta coù $f^{/}(r)=6(32r-(4q-1)(2q+1))$

Coù 2 tröôøng hôïp xaûy ra

* Tröôøng hôïp 1. $1 \ge 4q \Rightarrow f^{/}(r) \ge 0 \Rightarrow f(r)$ laø haøm ñoàng bieán $\forall r \ge 0$.

* Tröôøng hôïp 2. $4q \ge 1 \Rightarrow r \ge \dfrac{4q-1}{9} \ge 0$. Do ñoù

$$\begin{aligned} f^{/}(r)=6(32r-(4q-1)(2q+1)) &\ge 6\left(\frac{32(4q-1)}{9}-(4q-1)(2q+1)\right) \\ &= \frac{2(4q-1)(23-18q)}{3} \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(r)$ laø haøm ñoàng bieán $\forall r \ge 0$.

Toùm laïi, trong moïi tröôøng hôïp, ta luoân coù $f(r)$ laø haøm ñoàng bieán $\forall r \ge 0$. Do ñoù

$$f(r) \ge f(0)=q(4q-1)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

* Chu y.

Cac ban nen chu y rang phöông phap nay chæ ñac biet co hieu qua ñoi vôi nhöng bat ñang thöc ma dau bang xay ra khi $a=b=c$ hoac trong ba so $a,b,c$ co mot so bang 0, hai so con lai bang nhau.

# BAI TAP

**Bai 1. (Iran 1996)**

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$$

**Bai 2. (Pham Kim Hung)**

Cho $a,b,c$ la cac so thöc döông thoa man $abc=1$. Chöng minh rang

$$64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\leq(a+b+c)^6$$

**Bai 3.**

Cho $a,b,c\in\mathbf{R}$ thoa $a^2+b^2+c^2=9$. Tìm gia trò lôn nhat cua bieu thöc

$$P=2(a+b+c)-abc$$

**Bai 4.**

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

a) $\dfrac{abc}{a^3+b^3+c^3}+\dfrac{2}{3}\geq\dfrac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}$

b) $\dfrac{a^3+b^3+c^3}{4abc}+\dfrac{1}{4}\geq\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)^2$

**Bai 5.**

Cho $x,y,z>0$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{x^4+y^4+z^4}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}}+\sqrt{\frac{2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2}}\geq1+\sqrt{2}$$

**Bai 6. (Vietnam TST 1996)**

Cho $a,b,c\in\mathbf{R}$. Chöng minh rang

$$(a+b)^4+(b+c)^4+(c+a)^4\geq\frac{4}{7}.(a^4+b^4+c^4)$$

Bai 7.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{9}{a+b+c}\ge 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

Bai 8.

Cho $a,b,c>0$ thoa $ab+bc+ca=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{2+a^2}+\frac{1}{2+b^2}+\frac{1}{2+c^2}\le 1$$

Bai 9. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c>0$ thoa $ab+bc+ca=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}+\frac{1}{1+c^2}\ge \frac{3}{2}$$

Bai 10. (Kvant 1993)

Cho $a,b,c,d>0$ thoa $a+b+c=1$.Chöng minh rang

$$a^3+b^3+c^3+abcd\ge \min\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{d}{27}\right\}$$

Bai 11. (Mihai Piticari, Dan Popescu)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=1$.Chöng minh rang

$$5(a^2+b^2+c^2)\le 6(a^3+b^3+c^3)+1$$

Bai 12.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{8abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 2$$

Bai 13.

Cho $x,y,z>0$ thoa $x+y+z=1$. Chöng minh rang

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}}\le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Bai 14. (Pham Van Thuan)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{2}.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}\right)\geq 4$$

Bai 15. (Toan Hoc Tuoi Tre 2002)

Cho $a,b,c\in \mathrm{R}$ thoa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm gia trò lôn nhat cua bieu thöc:

$$P=3(a+b+c)-22abc$$

Bai 16. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$(1+a^{k+1})(1+b^{k+1})(1+c^{k+1})\geq(1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)\quad \forall k\geq 1$$

Bai 17. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $a^2+b^2+c^2=3$. Chöng minh rang

$$12+9abc\geq 7(ab+bc+ca)$$

Bai 18. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $ab+bc+ca=3$. Chöng minh rang

$$a^3+b^3+c^3+7abc\geq 10$$

Bai 19.

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{6-ab}+\frac{1}{6-bc}+\frac{1}{6-ca}\leq\frac{3}{5}$$

Bai 20. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $a^2+b^2+c^2=3$. Chöng minh rang

$$5(a+b+c)+\frac{3}{abc}\geq 18$$

# HAM LOI (LOM), HAM NÖA LOI NÖA LOM VA BAT ÑANG THÖC

Vo Quoc Ba Can

## I. Cac ñònh nghóa.

### 1. Ñònh nghóa ham loi (lom).

Ham so $f(x)$ ñöôc goi la loi tren tap $[a,b]\subset \mathbf{R}$ neu vôi moi $x,y\in[a,b]$ va vôi moi cap so khong am $\alpha,\beta$ co tong bang 1, ta ñeu co

$$f(\alpha x+\beta y)\geq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

Ham so $f(x)$ ñöôc goi la lom tren tap $[a,b]\subset \mathbf{R}$ neu vôi moi $x,y\in[a,b]$ va vôi moi cap so khong am $\alpha,\beta$ co tong bang 1, ta ñeu co

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha f(x)+\beta f(y)$$

Ket qua sau ñay chung ta thöông dung ñe nhan biet mot ham la loi hay lom

Neu $f(x)$ kha vi bac hai tren $[a,b]$ thì $f(x)$ loi (lom) tren $[a,b]$ khi va chæ khi $f''(x)\leq 0$ ($f''(x)\geq 0$) $\forall x\in[a,b]$.

### 2. Ñònh nghóa ham nöa loi nöa lom.

Ham so $f(x)$ ñöôc goi la nöa loi nöa lom tren $[a,b]\subset \mathbf{R}$ neu ton tai duy nhat hang so $c$ $(a<c<b)$ sao cho $f(x)$ loi tren $[a,c]$ va lom tren $[c,b]$ (hoac ngöôc lai).

## II. Mot so tính chat.

### 1. Tính chat 1.

Neu $f(x)$ la mot ham lom tren $[a,b]$ thì vôi moi $\begin{cases} b\geq x\geq z\geq y\geq a \\ x+y-z\geq a \end{cases}$ ta co

$$f(x)+f(y)\geq f(z)+f(x+y-z)$$

*Chöùng minh.*

Ta co $\forall h$ thoa $0 \le h \le x - y$ thì ton tai $\alpha \in [0,1]$ sao cho $h = \alpha(x - y)$

Do ño $x - h = (1-\alpha)x + \alpha y \in [a,b]$ nen theo ñònh nghóa ham lom, ta co

$$f(x-h) = f((1-\alpha)x + \alpha y) \le (1-\alpha) f(x) + \alpha f(y)$$

Töông töï, ta co $y + h = \alpha x + (1-\alpha) y \in [a,b]$ nen theo ñònh nghóa ham lom, ta cuing co

$$f(y+h) = f(\alpha x + (1-\alpha) y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

Do ño

$$f(x-h) + f(y+h) \le f(x) + f(y) \qquad (*)$$

Roi rang ta co $0 \le x - z \le x - y$ nen ap dung (*) vôi $h = x - z,$ ta ñöôc

$$f(x) + f(y) \ge f(z) + f(x + y - z)$$

Tính chat 1 ñöôc chöùng minh hoan toan.

Töø tính chat 1 ta suy ra ñöôc tính chat 2 nhö sau

## 2. Tính chat 2.

Neu $f(x)$ la mot ham lom tren $[a,b]$ thì vôi moi $x_1, x_2, ..., x_n \in [a,b]$ thoa man $x_1 + x_2 + ... + x_n - (n-1)a \le b$ thì ta co

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le (n-1) f(a) + f(x_1 + x_2 + ... + x_n - (n-1)a)$$

*Chöùng minh.*

Ta chöùng minh bang quy nap theo $n$.

Deã thay khang ñònh ñuùng cho 1 bien so.

Giaû söû khang ñònh ñuùng cho $n$ bien so, töùc la ta co

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n) \le (n-1) f(a) + f(x_1 + x_2 + ... + x_n - (n-1)a)$$

Ta seõ chöùng minh khang ñònh ñuùng cho $n+1$ bien so, töùc la chöùng minh

$$f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n+1}) \le nf(a) + f(x_1 + x_2 + ... + x_{n+1} - na)$$

Khong mat tính tong quat, ta co theå giaû söû $x_{n+1} = \max\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$. AÙp duïng giaû thiet quy nap, ta co

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\le(n-1)f(a)+f(x_1+x_2+...+x_n-(n-1)a)$$

Do ño, ñe chöng minh khang ñònh ñung cho $n+1$ bien so, ta chæ can chöng minh

$$f(x_1+x_2+...+x_n-(n-1)a)+f(x_{n+1})\le f(a)+f(x_1+x_2+...+x_{n+1}-na)$$

Do $x_{n+1}=\max\{x_1,x_2,...,x_{n+1}\}$ va $b\ge x_i\ge a\ \ \forall i=\overline{1,n}$ nen ta co

$$b\ge x_1+x_2+...+x_{n+1}-na\ge x_{n+1}\ge a$$

Do ño theo tính chat 1, ta co

$$\begin{aligned}&f(a)+f(x_1+x_2+...+x_{n+1}-na)\ge\\ &\ge f((x_1+x_2+...+x_{n+1}-na)+a-x_{n+1})+f(x_{n+1})\\ &=f(x_1+x_2+...+x_n-(n-1)a)+f(x_{n+1})\end{aligned}$$

Vay khang ñònh ñung cho $n+1$ bien so. Theo nguyen ly quy nap, khang ñònh ñung vôi moi $n\ge1$.

Tính chat 2 ñöôc chöng minh.

### 3. Tính chat 2'.

Neu $f(x)$ la mot ham loi tren $[a,b]$ thì vôi moi $\begin{cases}x_1,x_2,...,x_n\in[a,b]\\ x_1+x_2+...+x_n-(n-1)a\le b\end{cases}$ thì ta co

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)\ge(n-1)f(a)+f(x_1+x_2+...+x_n-(n-1)a)$$

### 4. Tính chat 3. (He qua cua ñònh ly Larange)

+ Neu $f(x)$ kha vi bac 2 tren $[a,b]$ va lom tren $[a,b]$ thì vôi moi $x,x_0\in[a,b]$ ta co

$$f(x)\ge f^{/}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

+ Neu $f(x)$ kha vi bac 2 tren $[a,b]$ va loi tren $[a,b]$ thì vôi moi $x,x_0\in[a,b]$ ta co

$$f(x)\le f^{/}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

Tö tính chat tren, ta suy ra ñöôc bat ñang thöc Jensen noi tieng. Cac ban hay thö chöng minh lai bang cach söû dung tính chat 3 xem nhö la bai tap.

## III. ÖÙng duïng vaøo baát ñaúng thöùc.

Caùc ñònh lyù sau ñaây coù theå xem nhö laø moät phöông phaùp chöùng minh baát ñaúng thöùc khaù hieäu quaû. (baïn cuõng neân töï chöùng minh laïi xem nhö laø baøi taäp, löu yù laø ñeå chöùng minh chuùng, ta chæ caàn duøng caùc tính chaát treân laø ñuû).

### 1. Ñònh lyù 1.

$x_1, x_2, ..., x_n$ laø $n$ soá thöïc thoûa maõn

i) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ii) $x_i \in [a,b]\ \forall i = \overline{1,n}$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$ ($C$ laø haèng soá)

vaø $f$ laø moät haøm treân $[a,b]$ thoûa maõn $f$ loài treân $[a,c]$ vaø loõm treân $[c,b]$.

Ñaët $F = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$

Khi ñoù

$F$ ñaït min khi $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{k-1} = a, x_{k+1} = ... = x_n \in [a,b]$ $(k = 1, 2, ..., n)$

$F$ ñaït max khi $x_1 = x_2 = ... = x_{k-1} \in [a,b], x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = b$ $(k = 1, 2, ..., n)$

### 2. Ñònh lyù 1'.

$x_1, x_2, ..., x_n$ laø $n$ soá thöïc thoûa maõn

i) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ii) $x_i \in [a,b]\ \forall i = \overline{1,n}$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$ ($C$ laø haèng soá)

vaø $f$ laø moät haøm treân $[a,b]$ thoûa maõn $f$ loõm treân $[a,c]$ vaø loài treân $[c,b]$.

Ñaët $F = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$

Khi ñoù

$F$ ñaït max khi $x_1 = x_2 = x_3 = ... = x_{k-1} = a, x_{k+1} = ... = x_n \in [a,b]$ $(k = 1, 2, ..., n)$

$F$ ñaït min khi $x_1 = x_2 = ... = x_{k-1} \in [a,b], x_{k+1} = x_{k+2} = ... = x_n = b$ $(k = 1, 2, ..., n)$

### 3. Ñònh ly 2.

$x_1, x_2, ..., x_n$ la $n$ so thöc thoa man

i) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ii) $x_i \in (-\infty, +\infty)\ \ \forall i = \overline{1,n}$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$ ($C$ la hang so)

va $f$ la mot ham tren $[a,b]$ thoa man $f$ loi tren $(-\infty, c]$ va lom tren $[c, +\infty)$.

Ñat $F = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$

Khi ño,

$F$ ñat min khi $x_1 \le x_2 = x_3 = ... = x_n$

$F$ ñat max khi $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \le x_n$ .

### 4. Ñònh ly 2'.

$x_1, x_2, ..., x_n$ la $n$ so thöc thoa man

i) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ii) $x_i \in (-\infty, +\infty)\ \ \forall i = \overline{1,n}$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$ ($C$ la hang so)

va $f$ la mot ham tren $[a,b]$ thoa man $f$ lom tren $(-\infty, c]$ va loi tren $[c, +\infty)$.

Ñat $F = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$

Khi ño,

$F$ ñat max khi $x_1 \le x_2 = x_3 = ... = x_n$

$F$ ñat min khi $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \le x_n$ .

## IV. Mot so ap dung.

### Ví du 1. (VMEO 2004)

Cho tam giac nhon $ABC$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P = \text{tg}A + 2\text{tg}B + 5\text{tg}C$$

*Lôi giai.*

Xet ham so $f(x)=\text{tg}x$ vôi $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ta co

$$f'(x)=\text{tg}^2x+1$$
$$f''(x)=2\text{tg}x(\text{tg}^2x+1)>0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ la ham lom tren $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do ño, theo tính chat ham lom, ta co

$$f(A)\geq f(\text{arctg}3)+f'(\text{arctg}3)(A-\text{arctg}3)=3+10(A-\text{arctg}3)$$

Töông tö, ta co

$$f(B)\geq f(\text{arctg}2)+f'(\text{arctg}2)(B-\text{arctg}2)=2+5(B-\text{arctg}2)$$
$$\Rightarrow 2f(B)\geq 4+10(B-\text{arctg}2)$$
$$f(C)\geq f(\text{arctg}1)+f'(\text{arctg}1)(C-\text{arctg}1)=1+2(C-\text{arctg}1)$$
$$\Rightarrow 5f(C)\geq 5+10(C-\text{arctg}1)$$

Do ño

$$\begin{aligned}P&=f(A)+2f(B)+5f(C)\\&\geq 12+10(A+B+C-\text{arctg}3-\text{arctg}2-\text{arctg}1)\\&=12\ \ (\text{vì } A+B+C=\text{arctg}3+\text{arctg}2+\text{arctg}1=\pi)\end{aligned}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $\begin{cases}A=\text{arctg}3\\B=\text{arctg}2\\C=\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$.

Vay

$$\min P=12.$$

Ví duï 2.

Cho caùc soá döông $a,b,c$ thoûa $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$$

*Lôøi giaûi.*

Ñaët $x=\frac{1}{a},y=\frac{2}{b},z=\frac{3}{c}$, baøi toaùn chuyeån veà

$x,y,z>0$ thoûa $2x+4y+7z\le 2xyz$. Tìm giaù trò nhoû nhaát cuûa bieåu thöùc

$$P=x+y+z$$

Khoâng maát tính toång quaùt, ta chæ caàn xeùt tröôøng hôïp $2x+4y+7z=2xyz$ laø ñuû (taïi sao?). Ñaët $x=\sqrt{7}m, y=\frac{\sqrt{7}}{2}.n, z=\frac{2\sqrt{7}}{7}.p$ thì ta coù $m+n+p=mnp$. Do ñoù, toàn taïi tam giaùc nhoïn $ABC$ sao cho $m=\text{tg}A, n=\text{tg}B, p=\text{tg}C$. Khi ñoù, ta coù

$$P=\frac{\sqrt{7}}{14}.(14\text{tg}A+7\text{tg}B+4\text{tg}C)$$

Xeùt haøm soá $f(x)=\text{tg}x$ vôùi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta coù

$$f'(x)=\text{tg}^2x+1$$
$$f''(x)=2\text{tg}x(\text{tg}^2x+1)>0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ laø haøm loài treân $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Do ñoù, theo tính chaát haøm loài, ta coù

$$f(A)\ge f\left(\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)+f'\left(\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\left(A-\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7}.\left(A - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$\Rightarrow 14f(A) \geq 6\sqrt{7} + 32\left(A - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

Töông tö, ta co

$$f(B) \geq f\left(\text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7}\right) + f'\left(\text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)\left(B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7}.\left(B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$\Rightarrow 7f(B) \geq 5\sqrt{7} + 32\left(B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$f(C) \geq f\left(\text{arctg}\sqrt{7}\right) + f'\left(\text{arctg}\sqrt{7}\right)\left(C - \text{arctg}\sqrt{7}\right)$$

$$= \sqrt{7} + 8\left(C - \text{arctg}\sqrt{7}\right)$$

$$\Rightarrow 4f(C) \geq 4\sqrt{7} + 32\left(C - \text{arctg}\sqrt{7}\right)$$

Do ño

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14}.(14f(A) + 7f(B) + 4f(C))$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14}.\left(15\sqrt{7} + 32\left(A + B + C - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} - \text{arctg}\sqrt{7}\right)\right)$$

$$= \frac{15}{2} \text{ (vì } A + B + C = \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} + \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} + \text{arctg}\sqrt{7} = \pi\text{)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $\begin{cases} A = \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} \\ B = \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \\ C = \text{arctg}\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = \frac{5}{2} \\ p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$

Vay

$\min P = \dfrac{15}{2}.$

Ví du 3. (Pham Kim Hung)

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoa $a_1 a_2 ... a_n = 1$. chöng minh rang vôi moi $k > 0$ thì

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \geq \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}$$

*Chöng minh.*

Neu $n=1$ thì bat ñang thöc ña cho hien nhien ñung.

Neu $n=2$

+ Neu $0<k<1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} \geq \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+\frac{1}{a_1}} = 1$$

+ Neu $k \geq 1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} = \frac{a_1^k + 1}{(a_1+1)^k} \geq \frac{1}{2^{k-1}}$$ (theo bat ñang thöc Holder)

Xet $n \geq 3$

Ta chöng minh bat ñang thöc ñung cho gia trò tôi han $1 = \dfrac{n}{2^k} \Leftrightarrow k = \log_2 n$.

Do $n \geq 3$ nen $n-1 > k > 1$.

Khi ño

+ $\forall m \geq k,$ ta co

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^k}\right)^{\frac{m}{k}} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left(\frac{n}{2^k}\right)^{\frac{m}{k}} = \frac{n}{2^m}$$

+ $\forall m \leq k,$ ta co

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m}\right)^{\frac{k}{m}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq 1$$

Khong mat tính tong quat gia sö $0 < a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$.

Ñat $x_1 = \ln a_1, x_2 = \ln a_2, ..., x_n = \ln a_n$ thì $\begin{cases} x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \text{ (do } a_1 a_2 ... a_n = 1) \end{cases}$

Xet ham so $f(x) = \dfrac{1}{(e^x + 1)^k}$

Ta co

$$f^{//}(x) = \frac{ke^x.(ke^x - 1)}{(e^x + 1)^{k+2}}$$

$$f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln k$$

Tö ño, ta co $f$ loi tren $(-\infty, -\ln k]$ va lom tren $[-\ln k, +\infty)$

$\Rightarrow$ Theo Ñònh ly 2, ta co

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + a_i)^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1 + e^{x_i})^k} \text{ ñat min khi } x_1 \le x_2 = x_3 = ... = x_n$$

$$\Rightarrow \min P \ge \min \left\{ \frac{n-1}{(e^t + 1)^k} + \frac{1}{(e^{-(n-1)t} + 1)^k} \right\} \ (t \ge 0)$$

$$= \min \left\{ \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k} \right\} \ (x = e^t \ge 1) \qquad (1)$$

Tiep theo, ta se tìm min cua ham so $g(x) = \dfrac{n-1}{(x+1)^k} + \dfrac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1} + 1)^k}$ vôi $x \ge 1$

Ta co $g^{/}(x) = (n-1)k \left( \dfrac{x^{(n-1)k-1}}{(x^{n-1} + 1)^{k+1}} - \dfrac{1}{(x+1)^{k+1}} \right)$

$$g^{/}(x) = 0 \Leftrightarrow x^{(n-1)k-1}.(x+1)^{k+1} = (x^{n-1} + 1)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{(n-1)k-1}{k+1}}.(x+1) = x^{n-1} + 1 \qquad (2)$$

Ñat $t = x^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow t \ge 1$. Khi ño, phöông trình (2) trô thanh

$$t^{(n-1)k-1}.(t^{k+1} + 1) = t^{(n-1)(k+1)} + 1$$

$$\Leftrightarrow t^{(n-1)(k+1)} - t^{nk} - t^{(n-1)k-1} + 1 = 0$$

Xét hàm số $h(t)=t^{(n-1)(k+1)}-t^{nk}-t^{(n-1)k-1}+1$ với $t\ge 1$

Ta có $h^{/}(t)=t^{(n-1)k-2}.((n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1)$

$$h^{/}(t)=0 \Leftrightarrow (n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1=0$$

Xét tiếp hàm số $m(t)=(n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1$ với $t\ge 1$

Ta có $m^{/}(t)=n(k+1)t^{k}((n-1)t^{n-k-1}-k)$

Chú ý rằng $n-1>k$ nên $m^{/}(t)\ge n(k+1)t^{k}((n-1)-k)>0$

$\Rightarrow m(t)$ là hàm đồng biến trên $[1,+\infty)$

Ta lại có $m(1)=(n-1)(k+1)-nk-(n-1)k+1=n(1-k)<0, \lim\limits_{t\to+\infty} m(t)=+\infty$

Nên phương trình $m(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0>1$

$\Rightarrow$ Phương trình $h^{/}(t)=0$ có nghiệm duy nhất $t_0>1$

Bảng biến thiên của $h(t)$

| $t$ | 1 | | $t_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h^{/}(t)$ | | – | 0 | + | |
| $h(t)$ | 0 | ↘ | | ↗ | $+\infty$ |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có

$h(t)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là 1 và $t_1>t_0>1$

Do đó $g^{/}(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt là 1 và $t_1^{k+1}>1$.

Bảng biến thiên của $g(x)$

| $x$ | 1 | | $t_1^{k+1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(x)$ | | + | 0 | – | |
| $g(x)$ | 1 | ↗ | | ↘ | 1 |

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta suy ra

$$g(x) \geq \min\left\{g(1), \lim_{x\to\infty} g(x)\right\} = 1 \quad \forall x \geq 1 \qquad (3)$$

Tö (1) va (3), ta suy ra ñpcm.

Ví du 4. (Vasile Cirtoaje)

Cho $n \geq 3, n \in N, 0 < k \leq \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$ va $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoa $a_1a_2...a_n = 1$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{\sqrt{1+ka_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+ka_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+ka_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

*Lôi giai.*

Ñat $y_i = ka_i$ $(i = \overline{1,n}) \Rightarrow y_1y_2...y_n = k^n$ vôi $k = \sqrt[n]{y_1y_2...y_n} \leq \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+y_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+y_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

Khong mat tính tong quat gia sö $0 < y_1 \leq y_2 \leq ... \leq y_n$.

Ñat $x_1 = \ln y_1, x_2 = \ln y_2, ..., x_n = \ln y_n$ thì $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = n \ln k \text{ (do } a_1a_2...a_n = 1) \end{cases}$

Xet ham so $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)^{1/2}}$

Ta co $f''(x) = \dfrac{e^x.(e^x-2)}{4(e^x+1)^{5/2}}; f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln 2$

Tö ño, ta co $f$ loi tren $(-\infty, \ln 2]$ va lom tren $[\ln 2, +\infty)$

$\Rightarrow$ Theo Ñònh ly 2, ta co

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+y_i)^{1/2}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+e^{x_i})^{1/2}} \text{ ñat max khi } x_1 = x_2 = ... = x_{n-1} \leq x_n.$$

$$\Rightarrow \max P \leq \max\left\{\frac{n-1}{\sqrt{e^t+1}} + \frac{1}{\sqrt{e^{n\ln k-(n-1)t}+1}}\right\} \ (t \leq \ln k)$$

$$= \max\left\{\frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1}+k^n}}\right\} \quad (x = e^t \le k) \qquad (1)$$

Tiep theo, ta se tìm max cua ham so $g(x) = \frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1}+k^n}}$ vôi $x \le k$

Ta co $g^{/}(x) = \frac{n-1}{2}.\left(\frac{k^n x^{\frac{n-3}{2}}}{(x^{n-1}+k^n)^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$g^{/}(x) = 0 \Leftrightarrow k^n x^{\frac{n-3}{2}}.(x+1)^{\frac{3}{2}} = (x^{n-1}+k^n)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow k^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-3}{3}}.(x+1) = x^{n-1} + k^n \qquad (2)$$

Ñat $t = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t \le k^{\frac{2}{3}}$. Khi ño, phöông trình (2) trô thanh

$$k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}}.\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} + k^n$$

$$\Leftrightarrow t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n = 0$$

Xet ham so $h(t) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n$ vôi $t \le k^{\frac{2}{3}}$

Ta co $h^{/}(t) = \frac{1}{2}.t^{\frac{n-5}{3}}.\left(3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}\right)$

$$h^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} = 0$$

Xet tiep ham so $m(t) = 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}$ vôi $t \le k^{\frac{2}{3}}$

Ta co $m^{/}(t) = \frac{3n}{2} t^{\frac{1}{2}}.\left(2(n-1)t^{\frac{2n-3}{2}} - k^{\frac{2n}{3}}\right)$

$$m^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \left(\frac{k^{\frac{2n}{3}}}{2(n-1)}\right)^{\frac{2}{2n-3}}$$

Do $0 < k \le \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$ nein $t_0 < k^{\frac{2}{3}}$. Qua $t_0$ thì $m^{/}(t)$ ñoi dau tö am sang döông nein

$m(t)$ nghòch bien trein $(0, t_0]$ vai ñoing bien trein $\left[t_0, k^{\frac{2}{3}}\right)$.

Ta lai coi $m(0) = 3 - n \le 0, m\left(k^{\frac{2}{3}}\right) = nk^{\frac{2n}{3}}(2-k) > 0$ $\left(\text{do } 2 > \dfrac{2n-1}{(n-1)^2} \ge k\right)$

Nein phöông trình $m(t) = 0$ coi nghieim duy nhat $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$.

$\Rightarrow$ Phöông trình $h^{/}(t) = 0$ coi nghieim duy nhat $0 < t_1 < k^{\frac{2}{3}}$

Baing bien thiein cuia $h(t)$

| $t$ | 0 | | $t_1$ | | $k^{2/3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h^{/}(t)$ | | – | 0 | + | |
| $h(t)$ | $k^n$ | ↘ | | ↗ | 0 |

Cain cöi vaio baing bien thiein, ta coi

$h(t) = 0$ coi 2 nghieim döông phain bieit lai $k^{2/3}$ vai $t_2 < t_1$.

Do ñoi $g^{/}(x) = 0$ coi 2 nghieim döông phain bieit lai $k$ vai $t_2^{3/2} < t_1^{3/2} < k$.

Baing bien thiein cuia $g(x)$

| $x$ | 0 | | $t_2^{3/2}$ | | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(x)$ | | – | 0 | + | 0 |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Cain cöi vaio baing bien thiein, ta suy ra

$$g(x) \le \max\{g(0), g(k)\} = \frac{n}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x \le k \qquad (3)$$

Töi (1) vai (3), ta suy ra ñpcm.

Ví du 5. (Vo Quoc Ba Can)

Cho cac so thöc $x, y, z$ thoa $\begin{cases} x, y, z \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right) \\ x + y + z = 1 \end{cases}$. Tìm gia trò lôn nhat va gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P(x,y,z) = \frac{x}{x^2+1} + \frac{y}{y^2+1} + \frac{z}{z^2+1}$$

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $x \le y \le z$

Xet ham so $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ vôi $x \in \left(-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$

Ta co

$$f^{//}(x) = \frac{x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = \pm\sqrt{3}$$

Qua 0 thì $f^{//}(x)$ ñoi dau tö döông sang am nen $f(x)$ lom tren $\left(-\sqrt{3}, 0\right]$ va loi tren $\left[0, \sqrt{3}\right)$.

Do ño, theo Ñònh ly 1', ta co $P(x,y,z) = f(x) + f(y) + f(z)$ ñat max khi

$$\begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3}, y = z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = y = -\sqrt{3} \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Hay

$$x = y = z = \frac{1}{3} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = z = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = y = -\sqrt{3} \\ z = 1 + 2\sqrt{3} \end{cases} \text{(loai)}$$

Ta lai co

$$P\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10}$$

$$P\left(-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}+1}{2},\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)=\frac{5+4\sqrt{3}}{4\left(4+\sqrt{3}\right)}<\frac{9}{10}$$

Do ño

$$\max P(x,y,z)=\frac{9}{10}.$$

Cuing theo Ñònh lyi 1’, ta coi $P(x,y,z)=f(x)+f(y)+f(z)$ ñait min khi

$$\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=y, z=\sqrt{3} \\ x+y+z=1 \end{cases} \vee \begin{cases} y=z=\sqrt{3} \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

Hay

$$x=y=z=\frac{1}{3} \vee \begin{cases} x=y=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ z=\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=1-2\sqrt{3} \\ y=z=\sqrt{3} \end{cases} \text{ (loaii)}$$

Ta lai coi

$$P\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{10}$$

$$P\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2},\frac{1-\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)=\frac{5-4\sqrt{3}}{4\left(4-\sqrt{3}\right)}$$

Vaiy

$$\min P(x,y,z)=\frac{5-4\sqrt{3}}{4\left(4-\sqrt{3}\right)}.$$

Keit luain

$$\max P(x,y,z)=\frac{9}{10}$$

$$\min P(x,y,z)=\frac{5-4\sqrt{3}}{4\left(4-\sqrt{3}\right)}$$

Ví duï 6. (Crux mathematicorum)

Cho caùc soá khoâng aâm $x_1, x_2, ..., x_n$ $(n \geq 2)$ thoûa $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Chöùng minh raèng

$$P = \sqrt{\frac{1-x_1}{1+x_1}} + \sqrt{\frac{1-x_2}{1+x_2}} + ... + \sqrt{\frac{1-x_n}{1+x_n}} \leq n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

*Chöùng minh.*

Xeùt haøm soá $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ vôùi $x \in [0,1]$.

Ta coù

$$f''(x) = \frac{(1+x)^2(1-2x)}{(1+x)^3(1-x)\sqrt{(1+x)^3(1-x)}}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Qua $\frac{1}{2}$ thì $f''(x)$ ñoåi daáu töø döông sang aâm neân $f(x)$ loõm treân $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ vaø loài treân $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Do ñoù, theo Ñònh lyù 1', ta coù $P = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)$ ñaït max khi

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_m = 0, x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n \quad (m = \overline{0, n-1}) \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 1 \end{cases}$$

Hay

$$\begin{cases} x_1 = x_2 = ... = x_m = 0 \\ x_{m+1} = x_{m+2} = ... = x_n = \dfrac{1}{n-m} \end{cases} \quad (m = \overline{0, n-1})$$

+ Neáu $m = n-1$ thì ta coù

$$\begin{aligned} P &= f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\ &\leq (n-1) f(0) + f(1) \\ &= n - 1 \\ &< n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (1) \end{aligned}$$

+ Neu $m < n-1$ thì ta co

$$\begin{aligned}
P &= f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_{n-1}) + f(x_n) \\
&\le mf(0) + (n-m) f\left(\frac{1}{n-m}\right) \\
&= m + (n-m)\sqrt{\frac{n-m-1}{n-m+1}} \\
&= n - t + t\sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

Trong ño $t = n - m \in [2, n]$.

Ta co

$$\begin{aligned}
g^{/}(t) &= \frac{t^2 - \sqrt{(t+1)^3(t-1)}}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}} \\
&= \frac{t^4 - (t+1)^3(t-1)}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}\left(t^2 + \sqrt{(t+1)^3(t-1)}\right)} \\
&= \frac{-2t^3 + 2t^2 + 1}{\sqrt{(t+1)^3(t-1)}\left(t^2 + \sqrt{(t+1)^3(t-1)}\right)} \\
&< 0 \quad (\text{do } t \ge 2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow g(t)$ la ham nghòch bien tren $[2, n]$.

$$\Rightarrow g(t) \le g(2) = n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \forall t \in [2, n]$$

$$\Rightarrow P \le n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Tö (1) va (2) suy ra trong moi tröông hôp, ta luon co

$$P \le n - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ví duï 7.

Cho caùc soá thöïc döông $a,b,c$ thoûa $abc=1$. Chöùng minh raèng

$$\frac{1}{a^2-a+1}+\frac{1}{b^2-b+1}+\frac{1}{c^2-c+1}\le 3$$

*Nhaän xeùt.*

Ta coù theå ñaët $a=e^x, b=e^y, c=e^z$ $(x,y,z\in \mathbf{R})$ thì ta coù $x+y+z=0$. Ñeán ñaây, neáu laøm theo caùch laøm treân, ta seõ xeùt haøm soá $f(t)=\dfrac{1}{e^{2t}-e^t+1}$ ñeå xem $f(t)$ coù laø haøm nöûa loài nöûa loõm hay khoâng. Nhöng ruûi thay, $f(t)$ laïi khoâng phaûi laø haøm nöûa loài nöûa loõm. Thaät vaäy, ta coù $f^{//}(t)=\dfrac{e^t(4e^{3t}-3e^{2t}-3e^t+1)}{(e^{2t}-e^t+1)^3}$. Deã thaáy $f^{//}(t)$ coù 2 nghieäm phaân bieät neân $f(t)$ khoâng phaûi laø haøm nöûa loài nöûa loõm. Vaäy phaûi laøm sao baây giôø? Laøm theá naøo ñeå vöôït qua noù ñaây? Sau ñaây giaûi phaùp cuûa toâi cho vaán ñeà treân

*Chöùng minh.*

Ta coù Boå ñeà sau

Boå ñeà. Vôùi moïi soá thöïc döông $a,b,c$ thoûa $abc=1$, ta coù

$$P(a,b,c)=\frac{1}{a^2+a+1}+\frac{1}{b^2+b+1}+\frac{1}{c^2+c+1}\ge 1$$

*Chöùng minh.*

Do $a,b,c>0$ vaø $abc=1$ neân toàn taïi $x,y,z\in \mathbf{R}$ sao cho $a=e^x, b=e^y, c=e^z$. Khi ñoù, ta coù $x+y+z=0$ vaø $P(a,b,c)=f(x)+f(y)+f(z)$ vôùi $f(t)=\dfrac{1}{e^{2t}+e^t+1}$.

Ta coù

$$f^{//}(t)=\frac{e^t(4e^{3t}+3e^{2t}-3e^t-1)}{(e^{2t}+e^t+1)^3}$$

De thay $f^{//}(t)=0$ co duy nhat mot nghiem $t_0$ va qua $t_0$ thì $f^{//}(t)$ ñoi dau tö am sang döông nen $f(t)$ loi tren $(-\infty,t_0]$ va lom tren $[t_0,+\infty)$ nen theo Ñònh ly 2, ta co $P(a,b,c)$ ñat min khi $x\le y=z$. Do ño, ta chæ can chöng minh

$$f(x)+2f(y)\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{e^{2x}+e^{x}+1}+\frac{2}{e^{2y}+e^{y}+1}\ge 1 \qquad (*)$$

Vôi $x,y\in \mathbf{R}$ thoa $x+2y=0$.

Ta co

$$(*)\Leftrightarrow \frac{2}{m^2+m+1}+\frac{1}{\frac{1}{m^4}+\frac{1}{m^2}+1}\ge 1 \ (m=e^y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m^2+m+1}+\frac{m^4}{m^4+m^2+1}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{m^2+m+1}+\frac{m^4}{(m^2+m+1)(m^2-m+1)}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow 2(m^2-m+1)+m^4\ge m^4+m^2+1$$

$$\Leftrightarrow (m-1)^2\ge 0 \text{ (ñung)}$$

Tö ñay, ta suy ra ñöôc

$$P(a,b,c)\ge 1$$

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

Trô lai bai toan cua ta

Tö Bo ñe tren, thay $a,b,c$ lan lööt bôi $\frac{1}{a^2},\frac{1}{b^2},\frac{1}{c^2}$, ta ñöôc

$$\frac{1}{\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{b^4}+\frac{1}{b^2}+1}+\frac{1}{\frac{1}{c^4}+\frac{1}{c^2}+1}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^4}{a^4+a^2+1}+\frac{b^4}{b^4+b^2+1}+\frac{c^4}{c^4+c^2+1}\ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+1}{a^4+a^2+1}+\frac{b^2+1}{b^4+b^2+1}+\frac{c^2+1}{c^4+c^2+1}\le 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(a^2+1)}{a^4+a^2+1}+\frac{2(b^2+1)}{b^4+b^2+1}+\frac{2(c^2+1)}{c^4+c^2+1}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a^2+a+1)+(a^2-a+1)}{(a^2+a+1)(a^2-a+1)}+\frac{(b^2+b+1)+(b^2-b+1)}{(b^2+b+1)(b^2-b+1)}+$$

$$+\frac{(c^2+c+1)+(c^2-c+1)}{(c^2+c+1)(c^2-c+1)}\le 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\right)+\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}\right)\le 4 \qquad (**)$$

Lai ap dung Bo ñe tren, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2+a+1}\ge 1$$

Nen tö (**), ta suy ra ñöôc

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-a+1}\le 3$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

# Bai tap.

Bai 1. (VMEO 2005)

Cho $a,b,c$ la cac so thöc döông cho tröôc va $x,y,z$ la cac so thöc döông thoa man $ax+by+cz=xyz$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=x+y+z$$

Bai 2. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c$ la cac so thöc khong am. Chöng minh rang

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k+\left(\frac{b}{c+a}\right)^k+\left(\frac{c}{a+b}\right)^k \ge \min\left\{2,\frac{3}{2^k}\right\}\ \forall k\ge 0$$

Bai 3. (Crux mathematicorum)

Chöng minh rang vôi moi so khong am $a,b,c$ ta co

$$\sqrt{1+\frac{48a}{b+c}}+\sqrt{1+\frac{48b}{c+a}}+\sqrt{1+\frac{48c}{a+b}}\ge 15$$

Bai 4.

Cho tam giac khong tu $ABC$. Chöng minh rang

$$\frac{\cos^2 A}{\cos A+1}+\frac{\cos^2 B}{\cos B+1}+\frac{\cos^2 C}{\cos C+1}\ge\frac{1}{2}$$

Bai 5.

Xet cac so thöc khong am $x_1,x_2,...,x_n$ thoa man

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}=r\ge\sqrt{\frac{n-1}{n}}$$

Chöng minh rang

$$\frac{1}{1+x_1^2}+\frac{1}{1+x_2^2}+...+\frac{1}{1+x_n^2}\ge\frac{n}{1+r^2}$$

Bai 6.

Xet cac so thöc khong am $x_1, x_2, ..., x_n$ thoa man

$$\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = r \leq \sqrt{\frac{n-1}{n^2 - n + 1}}$$

Chöng minh rang

$$\frac{1}{1+x_1^2} + \frac{1}{1+x_2^2} + ... + \frac{1}{1+x_n^2} \leq \frac{n}{1+r^2}$$

Bai 7.

Xet cac so thöc khong am $x_1, x_2, ..., x_n$ thoa man

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = p \leq \frac{1}{n-1}$$

Chöng minh rang

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + ... + \frac{1}{1+x_n} \leq \frac{n}{1+p}$$

Bai 8.

Xet cac so thöc khong am $x_1, x_2, ..., x_n$ thoa man

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} = p \leq \sqrt{\frac{n}{n-1}} - 1$$

Chöng minh rang

$$\frac{1}{(1+x_1)^2} + \frac{1}{(1+x_2)^2} + ... + \frac{1}{(1+x_n)^2} \leq \frac{n}{(1+p)^2}$$

Bai 9.

Cho tam giac $ABC$. Tìm gia trò nho nhat cua cac bieu thöc

$$P = \sin A . \sin^2 B . \sin^3 C$$

$Q = \sin^m A . \sin^n B . \sin^p C$ ($m, n, p$ la cac so thöc döông cho tröôc)

# CAC BAI TOAN CHON LOC

----oOo----

### Bai toan 1. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c$ la cac so thöc khong am. Chöng minh rang

$$\frac{ab}{a+4b+4c}+\frac{bc}{b+4c+4a}+\frac{ca}{c+4a+4b}\le\frac{a+b+c}{9}$$

*Lôi giai.*

* Cach 1.

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$9\sum_{cyc} ab(4a+4b+c)(4a+b+4c)\le$$
$$\le (a+b+c)(4a+4b+c)(4a+b+4c)(a+4b+4c)$$
$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} a^4+16\sum_{cyc} ab^3\ge 11\sum_{cyc} a^3b+3\sum_{cyc} a^2b^2+6\sum_{cyc} a^2bc$$
$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc} a^4+11(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)+5\sum_{cyc} ab^3\ge 3\sum_{cyc} a^2b^2+6\sum_{cyc} a^2bc$$

Khong mat tính tong quat, gia sö $a=\min\{a,b,c\}$

Ñat $b=a+x, c=a+y$

Khi ño, ta co

$$\sum_{cyc} a^4=3a^4+4(x+y)a^3+6(x^2+y^2)a^2+4(x^3+y^3)a+x^4+y^4$$
$$\sum_{cyc} ab^3=3a^4+4(x+y)a^3+3(x^2+y^2+xy)a^2+(x^3+y^3+3xy^2)a+xy^3$$
$$\sum_{cyc} a^2b^2=3a^4+4(x+y)a^3+2(x^2+y^2+2xy)a^2+2(x^2y+xy^2)a+x^2y^2$$
$$\sum_{cyc} a^2bc=3a^4+4(x+y)a^3+(x^2+y^2+5xy)a^2+(x^2y+xy^2)a$$
$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=-xy(x-y)(3a+x+y)$$
$$=-3xy(x-y)a-x^3y+xy^3$$

Do ño, bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$27(x^2+y^2-xy)a^2+(21x^3+21y^3-45x^2y+36xy^2)a+$$
$$+4x^4+4y^4-11x^3y-3x^2y^2+16xy^3 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 27(x^2+y^2-xy)a^2+(21x^3+21y^3-45x^2y+36xy^2)a+$$
$$+(x-2y)^2(4x^2+5xy+y^2) \ge 0 \text{ (ñuing)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $a=b=c$ hoaic $a=0, b=2c$ vai caic hoain vò töông öing.

* Caich 2.

Ta coi

$$\sum_{cyc}\left(\frac{3ab}{a+4b+4c}+b\right)=4(a+b+c).\sum_{cyc}\frac{b}{a+4b+4c}$$

Do ño, bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$\frac{a}{4a+4b+c}+\frac{b}{4b+4c+a}+\frac{c}{4c+4a+b} \le \frac{1}{3} \qquad (*)$$

Khoing mat tính toing quait, ta coi theå giaû söû $a+b+c=3$. Khi ño, ta coi

$$(*) \Leftrightarrow \frac{a}{4-c}+\frac{b}{4-a}+\frac{c}{4-b} \le 1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a(4-a)(4-b) \le (4-a)(4-b)(4-c)$$
$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4$$

Nhö vaiy, ñeå chöing minh bat ñaing thöic ñaõ cho, ta cain phaûi chöing minh

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4 \qquad (**)$$

Khoing mat tính toing quait, ta coi theå giaû söû $b$ naim giöõa $a$ vai $c$.

Do ñoi

$$c(a-b)(c-b) \le 0$$
$$\Leftrightarrow b^2c+c^2a \le bc^2+abc$$
$$\Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+abc \le a^2b+bc^2+2abc=b(a+c)^2$$

Mat khac, ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$2b(a+c)^2 = 2b.(a+c).(a+c) \le \left(\frac{2b+(a+c)+(a+c)}{3}\right)^2 = 8$$

$$\Rightarrow b(a+c)^2 \le 4$$

Vay

$$a^2b+b^2c+c^2a+abc \le 4$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$ hoac $a=0, b=2c$ va cac hoan vò töông öng.

## Bai toan 2. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c$ la cac so thöc khong am thoa man $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$36(ab+bc+ca) \ge (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$$

*Lôi giai.*

Ñat $f(a,b,c) = 36(ab+bc+ca)-(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)$

Khong mat tính tong quat, gia sö $a \ge b \ge c \ge 0$

Khi ño, ta co

$$ab+bc+ca \ge a(b+c)$$

$$a^3+(b+c)^3 \ge a^3+b^3+c^3 \ge 0$$

$$a^3(b+c)^3 = a^3b^3+a^3c^3+3a^3b^2c+3a^3bc^2 \ge a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3 \ge 0$$

$$\Rightarrow \left(a^3+(b+c)^3\right)a^3(b+c)^3 \ge (a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)$$

$$\Rightarrow 36(ab+bc+ca)-(a^3+b^3+c^3)(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3) \ge$$

$$\ge 36a(b+c)-\left(a^3+(b+c)^3\right)a^3(b+c)^3$$

Do ño

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &\ge f(a,b+c,0) \\ &= f(a,3-a,0) \\ &= 36a(3-a)-a^3(3-a)^3(a^3+(3-a)^3) \\ &= 9a(3-a)(a^2-3a+2)^2(a(3-a)+1) \ge 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c) \ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c) = (2,1,0)$.

Bai toan 3. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c,d \ge 0$ thoa man $a+b+c+d=4$. Chöng minh rang

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \ge (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

*Lôi giai.*

+ Cach 1.

Khong mat tính tong quat gia söi $a \ge b \ge c \ge d \ge 0$

* Tröông hôp 1. $a \ge 3 \Rightarrow b+c+d \le 1 \Rightarrow 0 \le b \le 1, 0 \le c \le \frac{1}{2}, 0 \le d \le \frac{1}{3}.$

$$\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) - (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \ge$$

$$\ge (1+a^4) - (1+a^3)(1+1^3)\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$$

$$= a^4 - \frac{7}{3}.a^3 - \frac{4}{3}$$

$$\ge 3a^3 - \frac{7}{3}.a^3 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}.(a^3-2) > 0$$

$$\Rightarrow (1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \ge (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

* Tröông hôp 2. $3 \ge a \ge b \ge c \ge d \ge 0$

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\left(2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)\right) \ge 0$$

Xet ham so $f(x) = 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) - x + 1$ vôi $0 \le x \le 3$

Ta co

$$f'(x) = \frac{8x^3}{x^4+1} - \frac{6x^2}{x^3+1} - 1 = \frac{(x-1)(-x^6+x^5+x^4+7x^2+x+1)}{(x^4+1)(x^3+1)}$$

De thay $f^{/}(x)=0$ chæ co 2 nghiem döông phan biet la 1 va $x_0 \in (2,3)$.

Qua 1 thì $f^{/}(x)$ ñoi dau tö am sang döông, qua $x_0$ thì $f^{/}(x)$ ñoi dau tö döông sang am nen

$$f(x) \ge \min\{f(1), f(3)\} = \min\{0, 2(\ln 41 - \ln 14 - 1)\} = 0 \quad \forall x \in [0,3]$$

$$\Rightarrow 2\ln(1+x^4) - 2\ln(1+x^3) \ge x - 1 \ \ \forall x \in [0,3]$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\left(2\ln(1+a^4) - 2\ln(1+a^3)\right) \ge \sum_{cyc}(a-1) = 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=d=1$.

* Nhan xet.

Bang cach lam hoan toan töông tö, ta co ket qua sau

Cho $a,b,c,d \ge 0$ thoa man $a+b+c+d=4$. Khi ño, ta co

$$(1+a^{k+1})(1+b^{k+1})(1+c^{k+1})(1+d^{k+1}) \ge (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k) \quad \forall k \ge 2.$$

+ Cach 2.

Ta se chöng minh bat ñang thöc ña bang phöông phap phan chöng.

Gia sö ngöôc lai ton tai bon so khong am $(a,b,c,d)$ thoa $a+b+c+d=4$ sao cho

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) < (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3)$$

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $a \le b \le c \le d$.

Ñat $F_k = (1+a^k)(1+b^k)(1+c^k)(1+d^k)$. The thì theo bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$F_4.F_2 \ge F_3^2, F_3.F_1 \ge F_2^2, F_2.F_0 \ge F_1^2 \qquad (1)$$

Theo gia thiet phan chöng thì

$$F_4 < F_3 \qquad (2)$$

Tö (1) va (2), ta suy ra ñöôc

$$F_4 < F_3 < F_2 < F_1 < F_0 = 16 \qquad (3)$$

Tö (3), ta co $d < 2$.

Ñe dan tôi mau thuan vôi (3), ta se chöng minh

$$F_3 \geq F_1 \qquad (4)$$

That vay

$$(4) \Leftrightarrow (1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)(1-d+d^2) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}+\frac{(2a-1)^2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{(2b-1)^2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{(2c-1)^2}{4}\right)\left(\frac{3}{4}+\frac{(2d-1)^2}{4}\right) \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(1+\frac{(2a-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(2b-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(2c-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(2d-1)^2}{3}\right) \geq \left(\frac{4}{3}\right)^4$$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left(1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right)^4 \qquad (5)$$

Trong ño $x = \frac{2a-1}{\sqrt{3}}, y = \frac{2b-1}{\sqrt{3}}, z = \frac{2c-1}{\sqrt{3}}, t = \frac{2d-1}{\sqrt{3}}$

Tö ño, xet bat ñang thöc

$$(1+A^2)(1+B^2) \geq \left(1+\left(\frac{A+B}{2}\right)^2\right)^2 \qquad (6)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{8}.(A-B)^2(8-A^2-6AB-B^2) \geq 0$$

Ta thay neu $A+B \leq 2$ thì bat ñang thöc tren ñung.

Tö $a \leq b \leq c \leq d < 2$, ta de dang chöng minh ñöôc $\begin{cases} x+t<2 \\ y+z<2 \end{cases}$. Do ño, theo (6), ta

co

$$(1+x^2)(1+t^2) \geq \left(1+\left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right)^2$$

$$(1+y^2)(1+z^2) \geq \left(1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right)^2$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left[\left(1+\left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right)\right]^2$$

Töø $\begin{cases} x+t<2 \\ y+z<2 \end{cases}$ ta coù $\frac{x+t}{2}+\frac{y+z}{2}<2$. Do ñoù, theo (6), ta laïi coù

$$\left(1+\left(\frac{x+t}{2}\right)^2\right)\left(1+\left(\frac{y+z}{2}\right)^2\right) \geq \left(1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right)^2$$

Do ñoù

$$(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)(1+t^2) \geq \left(1+\left(\frac{x+y+z+t}{4}\right)^2\right)^4$$

$\Rightarrow$ (5) ñuùng

$\Rightarrow$ (4) ñuùng.

Töø ñaây daãn ñeán maâu thuaãn.

Vaäy ta phaûi coù

$$(1+a^4)(1+b^4)(1+c^4)(1+d^4) \geq (1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)(1+d^3) \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c=d=1$.

* Ghi chuù.

Ngoaøi 2 caùch chöùng minh treân, ta coøn coù moät caùch chöùng minh nöõa laø chöùng minh baát ñaúng thöùc maïnh hôn nhö sau

Cho $a,b,c,d \geq 0$ thoûa maõn $a+b+c+d=4$. Khi ñoù, ta coù

$$(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) \geq (1+a)(1+b)(1+c)(1+d)$$

*Chöùng minh.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$f(a,b,c,d) = (1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)(1+d^2) - (1+a)(1+b)(1+c)(1+d) \geq 0$$

Ta coù Nhaän xeùt sau

Nhaän xeùt. Neáu $a+b \leq 2$ vaø $a \geq x \geq b$ thì

$$f(a,b,c,d) \geq f(x, a+b-x, c, d)$$

That vay

$$f(a,b,c,d) - f(x, a+b-x, c, d) =$$
$$= (a-x)(x-b)((c+1)(d+1) - (c^2+1)(d^2+1)(ab - x^2 + ax + bx - 2))$$

Töi ñay, söi duing giai thiet, ta dei dang chöing minh ñöôic

$$f(a,b,c,d) \geq f(x, a+b-x, c, d)$$

Nhan xet ñöôic chöing minh.

Trôi lai bai toan cuia ta

Khoing mat tính toing quat, ta coi thei giai söi $a \leq b \leq c \leq d$ vai ñat $x = \dfrac{a+b+c}{3}$ thei

thì ta coi $a + c \leq 2$ vai $c \geq x \geq a$. Do ñoi, theo Nhan xet tren, ta coi

$$f(a,b,c,d) \geq f(a+c-x, b, x, d) \qquad (1)$$

Chui yi rang $x = \dfrac{(a+c-x)+b+x}{3}$ nen neu $\left[\begin{array}{l} x = \min\{x, b, a+c-x\} \\ x = \max\{x, b, a+c-x\} \end{array}\right.$ thì ta coi $x = b =$

$= a + c - x$ nen $f(a+c-x, b, x, d) = f(x, x, x, d)$

Giai söi ngöôic lai, khi ñoi coi 2 tröôing hôip xay ra

$$b < x < a + c - x \qquad (2)$$
$$b > x > a + c - x \qquad (3)$$

Lai söi duing Nhan xet, ta ñöôic

$$(2) \Rightarrow f(a+c-x, b, x, d) \geq f(x, a+b+c-2x, x, d) = f(x, x, x, d)$$
$$(3) \Rightarrow f(a+c-x, b, x, d) \geq f(a+b+c-2x, x, x, d) = f(x, x, x, d)$$

Toim lai, trong moi tröôing hôip, ta luon coi

$$f(a+c-x, b, x, d) \geq f(x, x, x, d)$$
$$\Rightarrow f(a,b,c,d) \geq f(x, x, x, d) \qquad (4)$$

Mat khac, ta coi

$$f(x,x,x,d) =$$
$$= f\left(\frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, \frac{4-d}{3}, d\right)$$

$$= \frac{1}{729}.(d-1)^2(d^6 - 22d^5 + 223d^4 - 1268d^3 + 4210d^2 - 7564d + 6364)$$
$$\geq 0$$

Nein töi (4), ta suy ra ñöôic

$$f(a,b,c,d) \geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toain 4. (Phaim Kim Huing)

Cho $x_1, x_2, ..., x_n$ lai cac soi thöic döông thoia main

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$$

Chöing minh raing

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i^2 + n - 1} \leq 1$$

*Lôi giai.*

Neiu $n = 1, n = 2$ thì bat ñaing thöic ñai cho trôi thanh ñaing thöic.

Xeit $n \geq 3$

Ñat $y_i = \dfrac{1}{x_i}$ $(i = \overline{1,n})$ thì $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i}$. Khi ñoi, bat ñaing thöic cain chöing minh töông

ñöông vôi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{y_i^2}{(n-1)y_i^2 + 1} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1} \geq 1$$

Giai söi ngöôic lai $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(n-1)y_i^2 + 1} < 1$.

Ñat $a_i = \dfrac{1}{(n-1)y_i^2 + 1}$ $(i = \overline{1,n})$ thì $a_i > 0$ $\forall i = \overline{1,n}, \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i < 1$ vai $y_i = \sqrt{\dfrac{1 - a_i}{(n-1)a_i}}$ $\forall i = \overline{1,n}$

Ñat $b_i = \dfrac{\sum\limits_{j \neq i} a_j}{n-1} \quad \forall i = \overline{1,n}, a = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$

Ta co

$$\sum_{i=1}^{n} a_i < 1 \Rightarrow 1 - a_i > \sum_{j \neq i} a_j = (n-1)b_i \quad \forall i = \overline{1,n} \Rightarrow y_i = \sqrt{\frac{1-a_i}{(n-1)a_i}} > \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \quad \forall i = \overline{1,n}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} y_i > \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{b_i}{a_i}}$$

Ta chöng minh

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{b_i}} \qquad (*)$$

That vay, ta co

$$\sqrt{n-1}.\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{b_i}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)b_i - (n-1)a_i}{\sqrt{a_i(n-1)b_i}}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\sum\limits_{j \neq i} a_j - (n-1)a_i}{\sqrt{a_i(a-a_i)}}$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)\left(\frac{1}{\sqrt{a_j(a-a_j)}} - \frac{1}{\sqrt{a_i(a-a_i)}}\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2 . \sum\limits_{k \neq i, k \neq j} a_k}{\sqrt{a_i a_j (a-a_i)(a-a_j)}.\left(\sqrt{a_i(a-a_i)} + \sqrt{a_j(a-a_j)}\right)}$$

$$\geq 0$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{(a_i - a_j)^2 (a - a_i - a_j)}{\sqrt{a_i a_j (a-a_i)(a-a_j)}.\left(\sqrt{a_i(a-a_i)} + \sqrt{a_j(a-a_j)}\right)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\frac{b_i}{a_i}} - \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \geq \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{a_i}{b_i}}$$

$\Rightarrow$ (*) ñung.

Vaäy $\sum_{i=1}^{n} y_i > \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{b_i}{a_i}} \ge \sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{a_i}{b_i}} > \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}$. Ñieàu naøy traùi vôùi giaû thieát.

Vaäy ta phaûi coù $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n-1)y_i^2+1} \ge 1$ (ñpcm).

## Baøi toaùn 5. (Phaïm Kim Huøng)

Cho $a,b,c$ laø caùc soá thöïc döông thoûa maõn $abc=1$. Chöùng minh raèng

i. $81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \le 8(a+b+c)^4$

ii. $64(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3) \le (a+b+c)^6$

*Lôøi giaûi.*

i. Ñaët $f(a,b,c) = 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$

Tröôùc heát ta chöùng minh raèng

$$f\left(x,x,\frac{1}{x^2}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(2x+\frac{1}{x^2}\right)^4 - 81(1+x^2)^2\left(1+\frac{1}{x^4}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 8(2x^3+1)^4 - 81x^4(1+x^2)^2(1+x^4) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(47x^{10}+94x^9-21x^8+120x^7+$$

$$+99x^6+78x^5+87x^4+96x^3+24x^2+16x+8) \ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

Vaäy

$$f\left(x,x,\frac{1}{x^2}\right) \ge 0 \qquad (*)$$

Tieáp theo, khoâng maát tính toång quaùt giaû söû $a \ge b \ge c$. Ta chöùng minh

$$f(a,b,c) \ge f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)$$

$$\Leftrightarrow 8(a+b+c)^4 - 81(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge$$

$$\ge 8\left(2\sqrt{ab}+c\right)^4 - 81(1+ab)^2(1+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\left((a+b+c)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+2c\right) \ge$$

$$\ge 81(a-b)^2(1+c^2)$$

$$\Leftrightarrow 8\left((a+b+c)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+2c\right)-$$
$$-81\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2(1+c^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+c-2\sqrt{ab}\right)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2+2c\right)-$$
$$-81\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2(1+c^2)\ge 0 \quad (**)$$

Ñat $t=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 \Rightarrow t\ge 4\sqrt{ab}\ge 4\ge 4c$

Xet ham so $g(t)=8\left(\left(t+c-2\sqrt{ab}\right)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)(t+2c)-81t(1+c^2)$

Ta can chöng minh $g(t)\ge 0$

Ta co

$$g'(t)=8\left(\left(t+c-2\sqrt{ab}\right)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)+16(t+2c)\left(t+c-2\sqrt{ab}\right)-81(1+c^2)$$
$$\ge 8\left(\left(4\sqrt{ab}+c-2\sqrt{ab}\right)^2+\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2\right)+$$
$$+16\left(4\sqrt{ab}+2c\right)\left(4\sqrt{ab}+c-2\sqrt{ab}\right)-81(1+c^2)$$
$$=3\left(16\left(c+2\sqrt{ab}\right)^2-27(1+c^2)\right)$$
$$=3\left(64ab-27+64c\sqrt{ab}-11c^2\right)\ge 0$$

$\Rightarrow g(t)$ ñoing bien.

$$\Rightarrow g(t)\ge f\left(4\sqrt{ab}\right)=4\left(8\left(c+2\sqrt{ab}\right)^3-81(1+c^2)\sqrt{ab}\right)$$
$$=4\left(8\left(\frac{1}{t^2}+2t\right)^3-81t\left(1+\frac{1}{t^4}\right)\right) \qquad (t=\sqrt{ab}\ge 1)$$
$$=\frac{4(64t^9-81t^7+96t^6-33t^3+1)}{t^6}\ge 0 \quad \forall t\ge 1$$

$\Rightarrow g(t)\ge 0$

$\Rightarrow$ (**) ñuing.

$\Rightarrow f(a,b,c)\ge f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},c\right)=f\left(\sqrt{ab},\sqrt{ab},\frac{1}{ab}\right)\ge 0$ (do (*))

$\Rightarrow$ ñpcm.

ii. Tröôùc heát xin ñöôïc nhaéc laïi khoâng chöùng minh keát quaû sau

Cho caùc soá thöïc döông $a,b,c$. Khi ñoù, toàn taïi caùc soá thöïc $x_0, y_0, x_1, y_1$ $(x_0, x_1, y_1 \geq 0)$ sao cho

$$\begin{aligned} &2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1 = a+b+c \\ &x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1 = ab+bc+ca \\ &x_0^2y_0 \leq abc \leq x_1^2y_1 \end{aligned}$$

Ngoaøi ra

+ Neáu $(a+b+c)^2 \geq 4(ab+bc+ca)$ thì $y_0 \leq 0$

+ Neáu $(a+b+c)^2 \leq 4(ab+bc+ca)$ thì $y_0 \geq 0$

Trôû laïi baøi toaùn cuûa ta

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$64\left(1+\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3 + a^3b^3c^3\right) \leq (a+b+c)^6$$

$$\Leftrightarrow 64\left(2+\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3\right) \leq (a+b+c)^6$$

$$\Leftrightarrow 64\left(2a^2b^2c^2 + abc\sum_{cyc} a^3 + \sum_{cyc} a^3b^3\right) \leq (a+b+c)^6$$

Khoâng maát tính toång quaùt giaû söû $a+b+c=1$. Ñaët $q = ab+bc+ca, r = abc$. Khi ñoù, baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$2r^2 + r(1-3q+3r) + q^3 - 3qr + 3r^2 \leq \frac{1}{64}$$

$$\Leftrightarrow f(r) = 8r^2 + (1-6q)r + q^3 - \frac{1}{64} \leq 0$$

Ta coù

$$\begin{aligned} &f'(r) = 16r + 1 - 6q \\ &f''(r) = 16 > 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(r)$ la ham lom.

* Tröông hôp 1. $4q \ge 1 \Rightarrow y_0 \ge 0 \Rightarrow 0 \le x_0 \le \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(r) \le \max\left\{ f(x_0^2 y_0), f(x_1^2 y_1)\right\}$

Ta co

$$f(x_0^2 y_0) =$$
$$= 8x_0^4 y_0^2 + (1 - 6(x_0^2 + 2x_0 y_0))x_0^2 y_0 + (x_0^2 + 2x_0 y_0)^3 - \frac{1}{64}$$
$$= \frac{(2x_0 - 1)(1024x_0^5 - 368x_0^4 + 264x_0^3 - 60x_0^2 + 2x_0 + 1)}{64} \le 0 \text{ (do } 0 \le x_0 \le \frac{1}{2})$$

Töông tö, ta co $f(x_1^2 y_1) \le 0$

$$\Rightarrow f(r) \le 0 \qquad (1)$$

* Tröông hôp 2. $4q \le 1$

$\Rightarrow f(r) \le \max\left\{ f(0), f(x_1^2 y_1)\right\}$

Theo tren, ta co $f(x_1^2 y_1) \le 0$

Ta lai co $f(0) = q^3 - \frac{1}{64} \le \left(\frac{1}{4}\right)^3 - \frac{1}{64} = 0$

$$\Rightarrow f(r) \le 0 \qquad (2)$$

Tö (1) va (2) ta suy ra ñpcm.

Bai toan 6. (Greece 2002)

Cho $a, b, c > 0$ thoa $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{b^2+1} + \frac{b}{c^2+1} + \frac{c}{a^2+1} \ge \frac{3}{4}.\left(a\sqrt{a} + b\sqrt{b} + c\sqrt{c}\right)^2$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+1}=\sum_{cyc}\frac{a^3}{a^2b^2+a^2}\ge\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{\sum\limits_{cyc}(a^2+a^2b^2)}$$

$$=\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{1+\sum\limits_{cyc}a^2b^2}$$

$$\ge\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{1+\frac{1}{3}.(a^2+b^2+c^2)^2}$$

$$=\frac{\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2}{1+\frac{1}{3}}$$

$$=\frac{3}{4}.\left(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}+c\sqrt{c}\right)^2$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

## Baøi toaùn 7. (Vasile Cirtoaje)

a) Cho $a,b,c>0$. Chöùng minh raèng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\right)\ge\frac{9}{2}$$

b) Cho $a,b,c,d>0$. Chöùng minh raèng

$$(ab+bc+cd+da)\left(\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)}\right)\ge 8$$

*Lôøi giaûi.*

a) AÙp duïng baát ñaúng thöùc AM–GM, ta coù

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\ge\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Do ñoù, ta chæ caàn chöùng minh

$$2(ab+bc+ca)\ge 3\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Leftrightarrow a(b+c)+b(c+a)+c(a+b)\ge 3\sqrt[3]{a(b+c).b(c+a).c(a+b)}$$

Ñieu nay hien nhien ñung theo bñt AM-GM.

$\Rightarrow$ ñpcm.

b) Ap dung bat ñang thöc AM–GM, ta co

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{c(c+d)}\ge \frac{2}{\sqrt{ac(a+b)(c+d)}}\ge \frac{8}{(a+c)(a+b+c+d)}$$

Töông tö, ta co

$$\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{d(d+a)}\ge \frac{8}{(b+d)(a+b+c+d)}$$

Do ño

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)}\ge$$

$$\ge \frac{8}{(a+c)(a+b+c+d)}+\frac{8}{(b+d)(a+b+c+d)}$$

$$=\frac{8}{(a+c)(b+d)}$$

$$=\frac{8}{ab+bc+cd+da}$$

Suy ra

$$(ab+bc+cd+da)\left(\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+d)}+\frac{1}{d(d+a)}\right)\ge 8 \text{ (ñpcm)}$$

Bai toan 8. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc\ge 1$. Chöng minh rang

$$a^{\frac{a}{b}}.b^{\frac{b}{c}}.c^{\frac{c}{a}}\ge 1$$

*Lôi giai.*

Do $a,b,c>0$ va $abc\ge 1$ nen ñat $a=ka',b=kb',c=kc'$ vôi $k\ge 1,a',b',c'>0$ va $a'b'c'=1$. Khi ño, bat ñangthöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$k^{\frac{a'}{b'}+\frac{b'}{c'}+\frac{c'}{a'}}.a'^{\frac{a'}{b'}}.b'^{\frac{b'}{c'}}.c'^{\frac{c'}{a'}} \ge 1$$

Do $k \ge 1$ nen ta chæ can chöng minh

$$a'^{\frac{a'}{b'}}.b'^{\frac{b'}{c'}}.c'^{\frac{c'}{a'}} \ge 1$$

Do ño, khong mat tính tong quat co the gia sö $abc = 1$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{a\ln a}{b} + \frac{b\ln b}{c} + \frac{c\ln c}{a} \ge 0$$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $a \ge b \ge c \Rightarrow \ln a \ge \ln b \ge \ln c$

+ Tröông hôp 1.1. $0 < b \le 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \ge \frac{b}{c} \ge \frac{c}{a}$

$\Rightarrow$ Theo bat ñang thöc Chebyshev, ta co

$$\frac{a\ln a}{b} + \frac{b\ln b}{c} + \frac{c\ln c}{a} \ge \frac{1}{3}.\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right)(\ln a + \ln b + \ln c) = 0$$

+ Tröông hôp 1.2. $b \ge 1 \Rightarrow \ln b \ge 0$

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{a\ln a}{b} + \frac{b\ln b}{c} + \frac{c\ln c}{a} \ge \ln a + \ln b + \ln c$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)\ln a}{b} + \frac{(b-c)\ln b}{c} + \frac{(c-a)\ln c}{a} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)\left(\frac{\ln a}{b} - \frac{\ln c}{a}\right) + (b-c)\left(\frac{\ln b}{c} - \frac{\ln c}{a}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(a\ln a - b\ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a\ln b - c\ln c)}{ac} \ge 0$$

Chu y rang $a \ge b \ge c$ va $abc = 1$ nen $c \le 1$ va $a \ge b \ge 1 \Rightarrow \begin{cases} \ln c \le 0 \\ \ln a \ge \ln b \ge 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a\ln a - b\ln c \ge 0 \\ a\ln b - c\ln c \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(a-b)(a\ln a - b\ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a\ln b - c\ln c)}{ac} \ge 0$$

* Tröông hôp 2. $a \le b \le c \Rightarrow c \ge 1 \ge a > 0$

Theo treân, ta coù bat ñang thöùc can chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\frac{(a-b)(a\ln a - b\ln c)}{ab} + \frac{(b-c)(a\ln b - c\ln c)}{ac} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(b-a)(b\ln c - a\ln a)}{ab} + \frac{(c-b)(c\ln c - a\ln b)}{ac} \ge 0$$

Do $a \le b \le c$ neân $\ln a \le \ln b \le \ln c$ vaø $\ln c \ge 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} b\ln c - a\ln a \ge a\ln c - a\ln a = a(\ln c - \ln a) \ge 0 \\ c\ln c - a\ln b \ge a\ln c - a\ln b = a(\ln c - \ln b) \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)(b\ln c - a\ln a)}{ab} + \frac{(c-b)(c\ln c - a\ln b)}{ac} \ge 0$$

Toùm laïi, ta luoân coù

$$\frac{a\ln a}{b} + \frac{b\ln b}{c} + \frac{c\ln c}{a} \ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a = b = c = 1$.

Baøi toaùn 9. (Phaïm Kim Huøng)

Cho $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoûa $a_1a_2...a_n = 1$. chöùng minh raèng vôùi moïi $k > 0$ thì

$$\frac{1}{(1+a_1)^k} + \frac{1}{(1+a_2)^k} + ... + \frac{1}{(1+a_n)^k} \ge \min\left\{1, \frac{n}{2^k}\right\}$$

*Lôøi giaûi.*

+ Caùch 1.

Ta coù Boå ñeà sau

Boå ñeà. $x_1, x_2, ..., x_n$ laø $n$ soá thöïc döông thoûa maõn

i) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n$

ii) $x_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1,n}$

iii) $x_1 + x_2 + ... + x_n = C$

va $f$ la mot ham tren $(-\infty,+\infty)$ thoa man $f$ loi tren $(-\infty,c]$ va lom tren $[c,+\infty)$

Ñat $F=f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_n)$

Khi ño, $F$ ñat min khi $x_1\le x_2=x_3=...=x_n$.

*Chöng minh.*

Gia sö $x_1,x_2,...,x_i\in(-\infty,c]$, do $f$ loi tren $(-\infty,c]$ nen

$$f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_i)\ge(i-1)f(c)+f(x_1+x_2+...+x_i-(i-1)c)$$

Mat khac do $f$ lom tren $[c,+\infty)$ nen

$$(i-1)f(c)+f(x_{i+1})+f(x_{i+2})+...+f(x_n)\ge(n-1)f\left(\frac{(i-1)c+x_{i+1}+x_{i+2}+...+x_n}{n-1}\right)$$

Do ño

$$F=\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\ge(n-1)f\left(\frac{(i-1)c+x_{i+1}+x_{i+2}+...+x_n}{n-1}\right)+f(x_1+x_2+...+x_i-(i-1)c)$$

Bo ñe ñöôc chöng minh.

Trô lai bai toan cua ta

Neu $n=1$ thì bat ñang thöc ña cho hien nhien ñung.

Neu $n=2$

+ Neu $0<k<1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}\ge\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+\frac{1}{a_1}}=1$$

+ Neu $k\ge1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}=\frac{a_1^k+1}{(a_1+1)^k}\ge\frac{1}{2^{k-1}}$$ (theo bat ñang thöc Holder)

Xet $n\ge3$

Ta chöng minh bat ñang thöc ñung cho gia trò tôi han $1=\frac{n}{2^k}\Leftrightarrow k=\log_2 n$.

Do $n\ge3$ nen $n-1>k>1$.

Khi ño

+ $\forall m \geq k,$ ta co

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^k} \right)^{\frac{m}{k}} \geq \frac{1}{n^{\frac{m}{k}-1}} \cdot \left( \frac{n}{2^k} \right)^{\frac{m}{k}} = \frac{n}{2^m}$$

+ $\forall m \leq k,$ ta co

$$\left( \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m} \right)^{\frac{k}{m}} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^k} \geq 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^m} \geq 1$$

Khong mat tính tong quat gia sö $0 < a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.

Ñat $x_1 = \ln a_1, x_2 = \ln a_2, ..., x_n = \ln a_n$ thì $\begin{cases} x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n \\ x_1 + x_2 + ... + x_n = 0 \text{ (do } a_1 a_2 ... a_n = 1) \end{cases}$

Xet ham so $f(x) = \dfrac{1}{(e^x+1)^k}$

Ta co

$$f^{//}(x) = \frac{ke^x.(ke^x - 1)}{(e^x+1)^{k+2}}$$

$$f^{//}(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln k$$

Töi ño, ta co $f$ loi tren $(-\infty, -\ln k]$ va lom tren $[-\ln k, +\infty)$

$\Rightarrow$ Theo Bo ñe tren, ta co

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+a_i)^k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(1+e^{x_i})^k} \text{ ñat min khi } x_1 \leq x_2 = x_3 = ... = x_n$$

$$\Rightarrow \min P \geq \min \left\{ \frac{n-1}{(e^t+1)^k} + \frac{1}{(e^{-(n-1)t}+1)^k} \right\} \ (t \geq 0)$$

$$= \min \left\{ \frac{n-1}{(x+1)^k} + \frac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1}+1)^k} \right\} \ (x = e^t \geq 1) \qquad (1)$$

Tiep theo, ta se tìm min cua ham so $g(x) = \dfrac{n-1}{(x+1)^k} + \dfrac{x^{(n-1)k}}{(x^{n-1}+1)^k}$ vôi $x \geq 1$

Ta co $g^{/}(x)=(n-1)k\left(\dfrac{x^{(n-1)k-1}}{(x^{n-1}+1)^{k+1}}-\dfrac{1}{(x+1)^{k+1}}\right)$

$$g^{/}(x)=0 \Leftrightarrow x^{(n-1)k-1}.(x+1)^{k+1}=(x^{n-1}+1)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow x^{\frac{(n-1)k-1}{k+1}}.(x+1)=x^{n-1}+1 \qquad (2)$$

Ñat $t=x^{\frac{1}{k+1}} \Rightarrow t\geq 1$. Khi ño, phöông trình (2) trô thanh

$$t^{(n-1)k-1}.(t^{k+1}+1)=t^{(n-1)(k+1)}+1$$

$$\Leftrightarrow t^{(n-1)(k+1)}-t^{nk}-t^{(n-1)k-1}+1=0$$

Xet ham so $h(t)=t^{(n-1)(k+1)}-t^{nk}-t^{(n-1)k-1}+1$ vôi $t\geq 1$

Ta co $h^{/}(t)=t^{(n-1)k-2}.((n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1)$

$$h^{/}(t)=0 \Leftrightarrow (n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1=0$$

Xet tiep ham so $m(t)=(n-1)(k+1)t^{n}-nkt^{k+1}-(n-1)k+1$ vôi $t\geq 1$

Ta co $m^{/}(t)=n(k+1)t^{k}((n-1)t^{n-k-1}-k)$

Chu y rang $n-1>k$ nen $m^{/}(t)\geq n(k+1)t^{k}((n-1)-k)>0$

$\Rightarrow m(t)$ la ham ñong bien tren $[1,+\infty)$

Ta lai co $m(1)=(n-1)(k+1)-nk-(n-1)k+1=n(1-k)<0, \lim\limits_{t\to+\infty}m(t)=+\infty$

Nen phöông trình $m(t)=0$ co nghiem duy nhat $t_0>1$

$\Rightarrow$ Phöông trình $h^{/}(t)=0$ co nghiem duy nhat $t_0>1$

Bang bien thien cua $h(t)$

| $t$ | $1$ | | $t_0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h^{/}(t)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h(t)$ | $0$ | $\searrow$ | | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Can cö vao bang bien thien, ta co

$h(t)=0$ co 2 nghiem phan biet la 1 va $t_1 > t_0 > 1$

Do ño $g^{/}(x)=0$ co 2 nghiem phan biet la 1 va $t_1^{k+1} > 1$.

Bang bien thien cua $g(x)$

| $x$ | 1 | | $t_1^{k+1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(x)$ | | + | 0 | − | |
| $g(x)$ | 1 | ↗ | | ↘ | 1 |

Can cö vao bang bien thien, ta suy ra

$$g(x) \ge \min\left\{g(1), \lim_{x\to\infty} g(x)\right\} = 1 \quad \forall x \ge 1 \qquad (3)$$

Tö (1) va (3), ta suy ra ñpcm.

+ Cach 2.

Ñat $f(t) = \dfrac{1}{(t+1)^k}$

Ta co bo ñe sau

Bo ñe. Neu $0 < a \le b \le c \le d$ va $ad = bc$ thì

$$f(a) + f(d) \ge \min\{f(b) + f(c), 1\}$$

*Chöng minh.*

Ñat $m = \sqrt{ad} = \sqrt{bc}$ va $g(t) = f(mt) + f\left(\dfrac{m}{t}\right) = (mt+1)^{-k} + \left(\dfrac{m}{t}+1\right)^{-k}$ vôi moi so döông $t$. Ñat $t_1 = \dfrac{c}{m}, t_2 = \dfrac{d}{m}$. Ta co $1 \le t_1 \le t_2$.

Ñe chöng minh Bo ñe, ta can chöng minh $g(t_2) \ge \min\{g(t_1), 1\}$

De thay $\lim\limits_{t\to+\infty} g(t) = 1$.

Xet tính ñôn ñieu cua ham $g$ tren khoang $[1, +\infty)$, ta co

$$g'(t) = mk\left(-(mt+1)^{-k-1} + \frac{1}{t^2}.\left(\frac{m}{t}+1\right)^{-k-1}\right)$$

$$g'(t) > 0 \Leftrightarrow (mt+1)^{k+1} > t^2.\left(\frac{m}{t}+1\right)^{k+1}$$

$$\Leftrightarrow t^{\frac{2}{k+1}} - mt + mt^{\frac{1-k}{1+k}} - 1 < 0$$

Xet ham so $h(t) = t^{\frac{2}{k+1}} - mt + mt^{\frac{1-k}{1+k}} - 1$ vôi $t \geq 1$.

Ta co

$$h(1) = 0$$

$$h'(t) = \frac{2}{k+1}.t^{\frac{k-1}{k+1}} - m + \frac{1-k}{1+k}.mt^{\frac{-2k}{k+1}}$$

$$h'(1) = \frac{2k}{k+1}.\left(\frac{1}{k} - m\right)$$

$$h''(t) = \frac{2(1-k)}{(1+k)^2}.t^{-\frac{1+3k}{1+k}}.(t - mk)$$

Tuy thuoc vao cac gia trò cua $m$ va $k$, ta co cac tröôøng hôp sau

* Tröôøng hôp 1. $k = 1, m \leq 1$. Khi ño, ta co $h(t) = (1-m)(t-1) \geq 0 \;\; \forall t > 1$, do ño $h \geq 0$ tren khoang $(1, +\infty)$.

* Tröôøng hôp 2. $k = 1, m > 1$. Khi ño, ta co $h(t) = (1-m)(t-1) < 0 \;\; \forall t > 1$, do ño $h < 0$ tren khoang $(1, +\infty)$.

* Tröôøng hôp 3. $k < 1, m \leq \frac{1}{k}$. Khi ño, ta co $h'' > 0 \;\; \forall t > 1$, vì $h'(1) \geq 0$ va $t > 1$, nen $h' > 0$ tren khoang $(1, +\infty)$. Vì $h(1) = 0$ nen $h > 0$ tren khoang $(1, +\infty)$.

* Tröôøng hôp 4. $k < 1, m > \frac{1}{k}$. Khi ño, ta co $h'(1) < 0$ va $h'' < 0$ tren $(1, mk)$. Do ño suy ra $h' < 0$ tren $(1, mk)$. Vì $h(1) = 0$ nen $h < 0$ tren $(1, mk]$. Tren khoang $(mk, +\infty)$, ta co $h'' > 0$, co nghóa $h$ la ham lom tren $(mk, +\infty)$. Vì $h(mk) < 0$ va

$\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)=+\infty$ nen ton tai duy nhat mot so thöc $p>1$ sao cho $h<0$ tren $(1,p)$ va $h>0$ tren $(p,+\infty)$.

Trong cac tröông hôp noi tren

+ Neu $h(t_2)\ge 0$ thì $h\ge 0$ tren $(t_2,+\infty)$, töc la $g'\le 0$. Suy ra ham $g$ ñôn ñieu giam tren khoang $\left[t_2,+\infty\right)$ va $g(t_2)\ge \lim\limits_{t\to+\infty} g(t)=1$.

+ Neu $h(t_2)\le 0$ thì $h\ge 0$ tren khoang $(1,t_2)$, hay $g'\ge 0$. Vay $g$ la ham ñôn ñieu tang, suy ra $g(t_1)\le g(t_2)$.

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Trô lai bai toan cua ta

Ta se chöng minh bat ñang thöc ña cho bang quy nap theo $n$.

Neu $n=1$ thì bat ñang thöc ña cho trô thanh ñang thöc.

Xet $n\ge 2$. Goi $m$ la trung bình nhan cua $a_1,a_2,...,a_n$ thì ta co $m=1$. Ta co, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_n)\ge \min\{nf(m),1\}$$

Neu $n=2$ thì ta co $\min\{2f(m),1\}=\min\left\{\dfrac{1}{2^{k-1}},1\right\}$

+ Neu $0<k<1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}\ge\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}=\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+\dfrac{1}{a_1}}=1$$

+ Neu $k\ge 1$ thì ta co

$$\frac{1}{(1+a_1)^k}+\frac{1}{(1+a_2)^k}=\frac{a_1^k+1}{(a_1+1)^k}\ge\frac{1}{2^{k-1}}$$ (theo bat ñang thöc Holder)

Vay khang ñònh ñung khi $n=2$.

Gia sö khang ñònh ñuing cho so cac bien be hôn $n$ $(n \geq 2)$. Ta se chöing minh khang ñònh ñuing cho so bien bang $n$. De thay rang trong day $a_1, a_2, ..., a_n$ luon chöa ít nhat mot so khong lôn hôn $m$ va ít nhat mot so khong nho hôn $m$. Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $a_1 \leq m \leq a_2$.

Ky hieu $x_1 = \min\left\{m, \dfrac{a_1a_2}{m}\right\}, x_2 = \max\left\{m, \dfrac{a_1a_2}{m}\right\}$.

Khi ño, ta co $a_1 \leq x_1 \leq x_2 \leq a_2$ va $x_1x_2 = a_1a_2$. Tö ñay, theo ket qua cua bo ñe tren, ta co

$$f(a_1) + f(a_2) \geq \min\{f(x_1) + f(x_2), 1\} = \min\left\{f(m) + f\left(\frac{a_1a_2}{m}\right), 1\right\}$$

Trung bình nhan cua $\dfrac{a_1a_2}{m}, a_3, ..., a_n$ cung bang $m$ va so bien la $n-1<n$ nen theo gia thiet quy nap, ta co

$$f\left(\frac{a_1a_2}{m}\right) + f(a_3) + ... + f(a_n) \geq \min\{(n-1)f(m), 1\}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}
&f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq \\
&\geq \min\left\{f(m) + f\left(\frac{a_1a_2}{m}\right), 1\right\} + f(a_3) + ... + f(a_n) \\
&= \min\left\{f(m) + f\left(\frac{a_1a_2}{m}\right) + f(a_3) + ... + f(a_n), 1 + f(a_3) + ... + f(a_n)\right\} \\
&\geq \min\left\{f(m) + f\left(\frac{a_1a_2}{m}\right) + f(a_3) + ... + f(a_n), 1\right\} \\
&\geq \min\{f(m) + \min\{(n-1)f(m), 1\}, 1\} \\
&\geq \min\{nf(m), 1\} \\
&\Rightarrow f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n) \geq \min\{nf(m), 1\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ khang ñònh ñuing vôi so bien so bang $n$.

Theo nguyein lyi quy nap, ta suy ra khang ñònh ñung vôi moi $n$. Ñay chính la ñieu ta can phai chöng minh.

## Bai toan 10. (Moldova 1999)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{ab}{c(c+a)}+\frac{bc}{a(a+b)}+\frac{ca}{b(b+c)}\ge\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}+\frac{c}{b+c}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x=\dfrac{a}{b}, y=\dfrac{b}{c}, z=\dfrac{c}{a}$ thì ta coi $x,y,z>0$ va $xyz=1$.

Khi ñoi, ta coi

$$\sum_{cyc}\frac{ab}{c(c+a)}=\sum_{cyc}\frac{\frac{b}{c}}{1+\frac{c}{a}}=\sum_{cyc}\frac{y}{1+z}$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{c+a}=\sum_{cyc}\frac{1}{1+\frac{c}{a}}=\sum_{cyc}\frac{1}{1+z}$$

Do ñoi, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{x}{y+1}+\frac{y}{z+1}+\frac{z}{x+1}\ge\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{y+1}\ge\frac{\sum_{cyc}(1+x)(1+y)}{(1+x)(1+y)(1+z)}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{x}{y+1}\ge\frac{3+2\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}xy}{2+\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}xy}$$

Ap duing bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta coi

$$\sum_{cyc}\frac{x}{y+1}=\sum_{cyc}\frac{x^2}{x+xy}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}x\right)^2}{\sum_{cyc}(x+xy)}=\frac{\left(\sum_{cyc}x\right)^2}{\sum_{cyc}x+\sum_{cyc}xy}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{\left(\sum_{cyc} x\right)^2}{\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy} \geq \frac{3+2\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy}{2+\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy}$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(2+\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy\right) \geq \left(\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy\right)\left(3+2\sum_{cyc} x+\sum_{cyc} xy\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc} x\right)^3+\left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 3\sum_{cyc} x+3\sum_{cyc} xy+3\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right)+\left(\sum_{cyc} xy\right)^2$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM và giả thiết, ta dễ dàng chứng minh được các bất đẳng thức sau

$$\sum_{cyc} x \geq 3$$

$$\sum_{cyc} xy \geq 3$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} xy\right)$$

Do đó, ta có

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^3 = \left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} x\right)^2 \geq 3\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right)$$

$$\Rightarrow 3\left(\sum_{cyc} x\right)^3 \geq 9\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right) \qquad (1)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(\sum_{cyc} xy\right) = \left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 9\sum_{cyc} x \qquad (2)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 9\sum_{cyc} xy \qquad (3)$$

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(\sum_{cyc} xy\right) \geq 3\left(\sum_{cyc} xy\right)^2 \qquad (4)$$

Coäng caùc baát ñaúng thöùc (1), (2), (3) vaø (4) veá theo veá, roài chia caû hai veá cho 3, ta thu ñöôïc

$$\left(\sum_{cyc} x\right)^3+\left(\sum_{cyc} x\right)^2\left(\sum_{cyc} xy\right)\ge 3\sum_{cyc} x+3\sum_{cyc} xy+3\left(\sum_{cyc} x\right)\left(\sum_{cyc} xy\right)+\left(\sum_{cyc} xy\right)^2 \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $x=y=z=1 \Leftrightarrow a=b=c$.

## Baøi toaùn 11.

Cho $a,b,c\in R$ thoûa $(a-b)(b-c)(c-a)\ne 0$. Chöùng minh raèng

$$\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2}+\frac{(1-b^2)(1-c^2)}{(b-c)^2}+\frac{(1-c^2)(1-a^2)}{(c-a)^2}\ge -1$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\sum_{cyc}\left(\frac{(1-a^2)(1-b^2)}{(a-b)^2}+1\right)\ge 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{1-ab}{a-b}\right)^2\ge 2 \qquad (*)$$

Ñaët $x=\dfrac{1-ab}{a-b}, y=\dfrac{1-bc}{b-c}, z=\dfrac{1-ca}{c-a}$ thì ta coù

$$(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$$
$$\Rightarrow xy+yz+zx=-1$$

Khi ñoù

$$(*)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge -2(xy+yz+zx)$$
$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2\ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 12.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2c+a}\geq 0$$

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat co the gia sö $a=\max\{a,b,c\}$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $a\geq b\geq c$

Khi ño, ta co $\begin{cases}2a+b\geq 2b+c>0\\ 2a+b\geq 2c+a>0\end{cases}$. Do ño

$$\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2c+a}\geq\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2a+b}=0$$

* Tröông hôp 2. $a\geq c\geq b$

Khi ño, ta co $\begin{cases}2c+a\geq 2b+c>0\\ 2a+b\geq 2b+c>0\end{cases}$. Do ño

$$\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2c+a}\geq\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2b+c}=0$$

Tom lai, ta luon co

$$\frac{\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{a}}{2a+b}+\frac{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}}{2b+c}+\frac{\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{c}}{2c+a}\geq 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

* Nhan xet.

Bang cach lam hoan toan töông tö, ta co

$$\frac{c^n-a^n}{2a+b}+\frac{a^n-b^n}{2b+c}+\frac{b^n-c^n}{2c+a}\geq 0\quad\forall a,b,c,n>0$$

## Bai toan 13.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\sum_{cyc}\frac{2a^n-b^n-c^n}{b^2-bc+c^2}\ge 0$$

trong ñoi $n>0$ la hang so cho tröôc.

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat gia söi $a\ge b\ge c>0$.

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$(a^n-b^n)\left(\frac{2}{b^2-bc+c^2}-\frac{1}{a^2-ac+c^2}-\frac{1}{a^2-ab+b^2}\right)+$$
$$+(b^n-c^n)\left(\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{a^2-ac+c^2}-\frac{2}{a^2-ab+b^2}\right)\ge 0$$

Do $a\ge b\ge c>0$ nen $\begin{cases}a^2-ab+b^2\ge b^2-bc+c^2>0\\ a^2-ac+c^2\ge b^2-bc+c^2>0\end{cases}$

$$\Rightarrow \frac{2}{b^2-bc+c^2}-\frac{1}{a^2-ac+c^2}-\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge 0$$

Do ño, ta chæ can chöng minh

$$\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{a^2-ac+c^2}-\frac{2}{a^2-ab+b^2}\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{b^2-bc+c^2}-\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{1}{a^2-ab+b^2}-\frac{1}{a^2-ac+c^2}$$
$$\Leftrightarrow (a-c)(a+c-b)(a^2-ac+c^2)\ge(b-c)(a-b-c)(b^2-bc+c^2)$$

+ Neu $a\le b+c$ thì ta co ngay ñpcm.

+ Neu $a>b+c$ thì ta co $\begin{cases}a-c\ge b-c\ge 0\\ a+c-b\ge a-b-c>0\\ a^2-ac+c^2\ge b^2-bc+c^2>0\end{cases}$

$$\Rightarrow (a-c)(a+c-b)(a^2-ac+c^2)\ge(b-c)(a-b-c)(b^2-bc+c^2)$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

Bai toan 14. (Toan Hoc Tuoi Tre 2006)

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ la cac so thöc döông thoa man $\sum_{i=1}^{k} a_i \le \sum_{i=1}^{k} i(i+1)\quad \forall k=\overline{1,n}$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n} \ge \frac{n}{n+1}$$

*Lôi giai.*

Tröôc het, ta chöng minh bo ñe sau

Bo ñe. Cho $n\ge 3, n\in N$. Khi ño, vôi hai day so thöc $(x_n)$ va $(y_n)$, ta co

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1}).\sum_{j=1}^{i} y_j + x_n.\sum_{i=1}^{n} y_i$$

*Chöng minh.*

Ta co

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1}).\sum_{j=1}^{i} y_j + x_n.\sum_{i=1}^{n} y_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} x_i.\sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1}.\sum_{j=1}^{i} y_j + x_n.\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i.\sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{i=1}^{n-2} x_{i+1}.\sum_{j=1}^{i} y_j - x_n.\sum_{i=1}^{n-1} y_i + x_n.\sum_{i=1}^{n} y_i \\
&= x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i.\sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{i=2}^{n-1} x_i.\sum_{j=1}^{i-1} y_j + x_n.\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) \\
&= x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_i.\left(\sum_{j=1}^{i} y_j - \sum_{j=1}^{i-1} y_j\right) + x_ny_n \\
&= x_1y_1 + \sum_{i=2}^{n-1} x_iy_i + x_ny_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_iy_i
\end{aligned}$$

Vay $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1}(x_i - x_{i+1}).\sum_{j=1}^{i} y_j + x_n.\sum_{i=1}^{n} y_i$. Bo ñe ñöôc chöng minh.

Trô lai bai toan cua ta

+ Neu $n=1$ thì hien nhien ta co $\frac{1}{a_1} \geq \frac{1}{2}$ (do gia thiet $a_1 \leq 2$) (1)

+ Neu $n=2$ thì theo giathiet, ta co $\begin{cases} a_1 \leq 2 \\ a_1 + a_2 \leq 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \leq 2 \\ a_2 \leq 8 - a_1 \end{cases}$

Do ño

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \geq \frac{1}{a_1} + \frac{1}{8-a_1} &= \frac{8}{a_1(8-a_1)} \\
&= \frac{8}{-a_1^2 + 8a_1} \\
&= \frac{8}{-(a_1-2)^2 + 4a_1 + 4} \\
&\geq \frac{8}{4.2+4} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned} \quad (2)$$

+ Neu $n \geq 3$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(\frac{1}{i(i+1)}\right)^2}{\left(\frac{a_i}{i^2(i+1)^2}\right)} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2(i+1)^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2}.\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2(i+1)^2}}$$

Ap dung bo ñe vôi $x_i = \frac{1}{i(i+1)}; y_i = a_i \ \forall i = 1,2,...,n,$ ta co

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{i^2(i+1)^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2}\right).\sum_{j=1}^{i} a_j + \frac{1}{n^2(n+1)^2}.\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2}\right).\sum_{j=1}^{i} j(j+1) + \frac{1}{n^2(n+1)^2}.\sum_{i=1}^{n} i(i+1) \text{ ( gt)}$$

Lai ap dung bo ñe vôi $x_i = \dfrac{1}{i^2(i+1)^2}, y_i = i(i+1)\ \forall i = 1,2,...,n,$ ta co

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2(i+1)^2}.i(i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{i^2(i+1)^2} - \frac{1}{(i+1)^2(i+2)^2}\right).\sum_{j=1}^{i} j(j+1) + \frac{1}{n^2(n+1)^2}.\sum_{i=1}^{n} i(i+1)$$

Do ño $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i^2(i+1)^2} \leq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \frac{n^2}{(n+1)^2}.\frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i^2(i+1)^2}} \geq \frac{n^2}{(n+1)^2}.\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n+1}\right)} = \frac{n}{n+1}$$

Vay $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \frac{n}{n+1}$ (3)

Tö (1), (2) va (3), ta suy ra ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a_i = i(i+1)\ \forall i = 1,2,...,n.$

* Nhan xet.

Bang cach lam hoan toan töông tö, ta co ket qua sau

$(a_n),(b_n)$ la hai day so thöc döông thoa man $\begin{cases} b_1 \leq b_2 \leq ... \leq b_n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \leq \sum_{i=1}^{k} b_i\ \forall k = \overline{1,n} \end{cases}$.

Khi ño, ta co

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} \geq \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{b_i}$$

## Bai toan 15. (Pham Kim Hung)

Cho $n \geq 4, n \in N$ va $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoa $a_1 a_2 ... a_n = 1$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \geq n + 3$$

*Lôi giai.*

+ Cach 1.

Ñat $f(a_1, a_2, ..., a_n) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n} + \frac{3n}{a_1 + a_2 + ... + a_n}$. Ta can tìm $\min f$.

Gia sö vôi bo so $(x_1, x_2, ..., x_n)$ thoa $x_1 x_2 ... x_n = 1$ thì $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \min f$.

Khong mat tính tong quat gia sö $0 < x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$.

Ta chöng minh rang ñe $f(x_1, x_2, ..., x_n) = \min f$ thì $x_1 = x_2 = ... = x_{n-1}$.

That vay, gia sö $x_1 = x_2 = ... = x_i$ $(1 \leq i \leq n-3)$. Ta chöng minh $x_{i+1} = x_i = ... = x_1$.

Gia sö ngöôc lai $x_{i+1} > x_i$. Ta se chöng minh

$$f(x_1, ..., x_i, x_{i+1}, ..., x_n) > f\left(x_1, ..., x_{i-1}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, \sqrt{x_i x_{i+1}}, x_{i+2}, ..., x_n\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_i} + \frac{1}{x_{i+1}} + ... + \frac{1}{x_n} + \frac{3n}{x_1 + ... + x_i + x_{i+1} + ... + x_n} > \frac{1}{x_1} + ... + \frac{1}{x_{i-1}} +$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{x_i x_{i+1}}} + \frac{1}{x_{i+2}} + \frac{1}{x_{i+3}} + ... + \frac{1}{x_n} + \frac{3n}{x_1 + ... + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\right)^2}{x_i x_{i+1}} > \frac{3n\left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_{i+1}}\right)^2}{(x_1 + ... + x_i + x_{i+1} + ... + x_n)\left(x_1 + ... + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n\right)}$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + ... + x_i + x_{i+1} + ... + x_n)\left(x_1 + ... + x_{i-1} + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n\right) > 3n x_i x_{i+1}$$

$$\Leftrightarrow (i x_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_n)\left((i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n\right) > 3n x_i x_{i+1}$$

Ta co

$$\begin{cases} x_n \geq x_{n-1} \geq ... \geq x_{i+1} > x_i = x_{i-1} = ... = x_1 > 0 \\ 1 \leq i \leq n-3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ix_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_n \geq ix_i + (n-i)x_{i+1} > (n-i)x_{i+1} \geq 3x_{i+1} > 0 \\ (i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n > nx_i > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (ix_i + x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_n)\left((i-1)x_i + 2\sqrt{x_i x_{i+1}} + x_{i+2} + ... + x_n\right) > 3nx_i x_{i+1}$$

Vay $f(x_1,...,x_i,x_{i+1},...,x_n) > f\left(x_1,...,x_{i-1},\sqrt{x_i x_{i+1}},\sqrt{x_i x_{i+1}},x_{i+2},...,x_n\right)$. Ñieu nay voi ly vì $f(x_1,x_2,...,x_n) = \min f$. Vay ta phai co $x_{i+1} = x_i = ... = x_1$.

Bang lap luan töông tö, ta ñi ñen ket qua sau ñe $f(x_1,x_2,...,x_n) = \min f$ thì ta phai co $x_{n-2} = x_{n-3} = ... = x_1$.

Tiep theo, ta se chöng minh $x_{n-1} = x_{n-2} = ... = x_1$.

Gia sö ngöôc lai $x_{n-1} > x_{n-2}$

Khi ño, ta se chöng minh

$$f(x_1,x_2,...,x_{n-2},x_{n-1},x_n) > f\left(x_1,x_2,...,x_{n-3},\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}},\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}},x_n\right)$$

$$\Leftrightarrow ((n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)\left((n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}} + x_n\right) > 3nx_{n-2}x_{n-1}$$

Do $x_n \geq x_{n-1} > x_{n-2} = x_{n-3} = ... = x_1 > 0$ nen

$$\begin{cases} (n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n \geq 2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2} > 0 \\ (n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}} + x_n > x_{n-1} + (n-1)x_{n-2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((n-2)x_{n-2} + x_{n-1} + x_n)\left((n-3)x_{n-2} + 2\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}} + x_n\right) >$$
$$> (2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2})(x_{n-1} + (n-1)x_{n-2})$$

Do ño, ta chæ can chöng minh

$$(2x_{n-1} + (n-2)x_{n-2})(x_{n-1} + (n-1)x_{n-2}) > 3nx_{n-1}x_{n-2}$$
$$\Leftrightarrow 2x_{n-1}^2 - 4x_{n-1}x_{n-2} + (n^2 - 3n + 2)x_{n-2}^2 > 0 \text{ (ñung)}$$

Vay ta co $f(x_1,x_2,...,x_{n-2},x_{n-1},x_n) > f\left(x_1,x_2,...,x_{n-3},\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}},\sqrt{x_{n-2}x_{n-1}},x_n\right)$.

Ñieu nay voi ly vì $f(x_1,x_2,...,x_n) = \min f$. Vay ta phai co $x_{n-1} = x_{n-2} = ... = x_1$.

Nhö vay, ta ñi ñen ket qua

Ñe $f(x_1,x_2,...,x_n) = \min f$ thì $x_n \geq x_{n-1} = x_{n-2} = ... = x_1$.

$$\Rightarrow \min f(a_1,a_2,...,a_n) \ge$$
$$\ge \min f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{x},...,\frac{1}{x},x^{n-1}\right)\ (x\ge 1)$$
$$= \min\left\{(n-1)x+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{3nx}{x^n+n-1}\right\}\ (x\ge 1) \qquad (1)$$

Tiep theo, ta se tìm min cua ham so $g(x)=(n-1)x+\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{3nx}{x^n+n-1}$ vôi $x\ge 1$

Ta co $g^{/}(x)=\dfrac{(n-1)(x^n-1)(x^{2n}-(n+2)x^n+(n-1)^2)}{x^n(x^n+n-1)^2}$

Theo bat ñang thöc AM-GM, ta co

$x^{2n}+(n-1)^2 \ge 2(n-1)x^n \ge (n+2)x^n$ (do $n\ge 4$)

$\Rightarrow g^{/}(x)\ge 0 \quad \forall x\ge 1$

$\Rightarrow g(x)$ ñong bien tren $[1,+\infty)$.

$$\Rightarrow g(x)\ge g(1)=n+3 \quad \forall x\ge 1 \qquad (2)$$

Töø (1) va (2), ta suy ra

$\min f(a_1,a_2,...,a_n)\ge n+3$

$\Rightarrow \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{3n}{a_1+a_2+...+a_n}\ge n+3$ (ñpcm)

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a_1=a_2=...=a_n=1$.

+ Cach 2.

Ta se chöùng minh ket qua manh hôn nhö sau

Cho $n$ so thöc döông $a_1,a_2,...,a_n$ thoa $a_1a_2...a_n=1$. Khi ño, ta co

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{k}{a_1+a_2+...+a_n}\ge n+\frac{k}{n}$$

Vôi $k=4(n-1)$ (noi rieng neu $n\ge 4$ thì $k\ge 3n$)

Ta se chöùng minh bang don bien. $n=1,n=2$ la cac tröôøng hôïp tam thöôøng nen ô ñay ta se khong xet tôùi. Ta se xet tröôøng hôïp $n\ge 3$.

Ñat $f(a_1,a_2,...,a_n)=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}+\frac{k}{a_1+a_2+...+a_n}-n-\frac{k}{n}$

Ta co Nhan xet sau

(i) Neu $\begin{cases} a_1 \le x \le a_2 \\ a_1a_2 \le 1 \end{cases}$ thì

$$f(a_1,a_2,...,a_n) \ge f\left(x,\frac{a_1a_2}{x},...,a_n\right)$$

(ii) Neu $(1-a_1)(1-a_2)\left[ka_1a_2-\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)\right]\ge 0$ thì

$$f(a_1,a_2,...,a_n)\ge f(1,a_1a_2,...,a_n)$$

*Chöng minh Nhan xet.*

Ñe tien viec trình bay xin ñöôc ky hieu $A=\sum_{i=3}^{n}a_i$.

(i) Ta co

$$f(a_1,a_2,...,a_n)-f\left(x,\frac{a_1a_2}{x},...,a_n\right)=$$

$$=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{x}-\frac{x}{a_1a_2}+\frac{k}{a_1+a_2+A}-\frac{k}{x+\frac{a_1a_2}{x}+A}$$

$$=\frac{(x-a_1)(a_2-x)\left[(a_1+a_2+A)\left(x+\frac{a_1a_2}{x}+A\right)-ka_1a_2\right]}{a_1a_2(a_1+a_2+A)(x^2+Ax+a_1a_2)}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$(a_1+a_2+A)\left(x+\frac{a_1a_2}{x}+A\right)\ge n^2\ge 4(n-1)=k\ge ka_1a_2$$

Do ño

$$f(a_1,a_2,...,a_n)\ge f\left(x,\frac{a_1a_2}{x},...,a_n\right)$$

(i) ñöôc chöng minh.

(ii) Khai trien töông töï nhö tren, ta co

$$f(a_1,a_2,...,a_n)-f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)=$$
$$=\frac{(1-a_1)(1-a_2)[(a_1+a_2+A)(1+a_1a_2+A)-ka_1a_2]}{a_1a_2(a_1+a_2+A)(1+A+a_1a_2)}$$
$$\geq 0$$
$$\Rightarrow f(a_1,a_2,...,a_n)\geq f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)$$

(ii) ñöôïc chöng minh.

Nhan xet ñöôïc chöng minh hoan toan. Löu y raèng cac bien $a_1,a_2,...,a_n$ bình ñang nen $a_1,a_2$ trong Nhan xet co the thay bang $a_i,a_j$ $(i\neq j)$ tuy y.

Trô lai bai toan cua ta

Ta se chöng minh raèng luon co the ñöa ve tröôøng hôïp trong $n$ bien co $n-1$ bien khong lôn hôn 1.

That vay, gia sö trong $n$ bien co nhieu hôn 1 bien lôn hôn 1, khong mat tính tong quat, ta co the gia sö la $a_1,a_2$. Xet 2 tröôøng hôïp

* Tröôøng hôïp 1. $ka_1a_2\geq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)$. Khi ño, theo Nhan xet (ii), ta co

$$f(a_1,a_2,...,a_n)\geq f(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)$$

Nhö vay, ta co the thay bo so $(a_1,a_2,...,a_n)$ bôi bo so $(1,a_1a_2,a_3,...,a_n)$ ñe $f$ khong tang. Khi ño, so bien bang 1 tang len ít nhat la 1.

* Tröôøng hôïp 2. $ka_1a_2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=3}^{n}a_i+a_1a_2+1\right)$.

Khi ño, vôi moi $a_j<1\leq a_2$ ($a_j$ luon ton tai vì $a_1a_2...a_n=1$) ta ñeu co

$$ka_1a_j\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i\neq 1,i\neq j}a_i+a_1a_j+1\right)$$

That vay, ta co

$$\frac{\sum\limits_{i\neq 1, i\neq j} a_i + a_1a_j + 1}{ka_1a_j} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + a_1a_j + 1 - a_1 - a_j}{ka_1a_j}$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + 1 - a_1 - a_j}{ka_1a_j} + 1$$

$$\geq \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + 1 - a_1 - a_2}{ka_1a_2} + 1$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=3}^{n} a_i + a_1a_2 + 1}{ka_1a_2}$$

$$\Rightarrow ka_1a_j \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i\neq 1, i\neq j} a_i + a_1a_j + 1\right)$$

Do ñoù $(1-a_1)(1-a_j)\left[ka_1a_j - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum\limits_{i\neq 1, i\neq j} a_i + a_1a_j + 1\right)\right] \geq 0$. Söû duïng Nhaän xeùt (ii), ta coù theå thay boä soá $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bôûi boä soá $(1, a_2, ..., a_1a_j, ..., a_n)$ ñeå $f$ khoâng taêng. Khi ñoù soá bieán baèng 1 cuõng taêng leân ít nhaát laø 1.

Toùm laïi, neáu vaãn coøn 2 bieán lôùn hôn 1 thì ta luoân coù theå thay boä soá ñang xeùt bôûi moät boä soá khaùc maø soá bieán baèng 1 taêng leân ít nhaát laø 1 ñeå $f$ khoâng taêng. Vieäc thay theá naøy chæ coù theå ñöôïc thöïc hieän khoâng quaù $n$ laàn (vì coù khoâng quaù $n$ baèng 1). Do ñoù, sau moät soá böôùc höõu haïn (khoâng quaù $n$), ta seõ ñöa baøi toaùn veà tröôøng hôïp trong $n$ bieán coù $n-1$ bieán khoâng lôùn hôn 1.

Tieáp theo, ta seõ chöùng minh coù theå thay $n-1$ bieán khoâng lôùn hôn 1 bôûi trung bình nhaân cuûa chuùng. Thaät vaäy, khoâng maát tính toång quaùt, giaû söû $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_{n-1} \leq 1$.

Ñaët $x = \sqrt[n-1]{a_1a_2...a_{n-1}} \leq 1$. Neáu $a_1 = x \vee a_{n-1} = x$ thì $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} = x$. Neáu toàn taïi $a_j$ $(1 < j < n-1)$ sao cho $a_j \neq x$ thì ta coù $a_1 < x < a_{n-1}$. Söû duïng Nhaän xeùt (i), ta

co the thay bo so $(a_1, a_2, ..., a_n)$ bôi bo so $\left(x, a_2, ..., \frac{a_1 a_{n-1}}{x}, a_n\right)$ ñe $f$ khong tang.

Khi ño, so bien bang $x$ tang len ít nhat la 1. Ta cung chu y rang $\frac{a_1 a_{n-1}}{x} \le \frac{a_1}{x} \le 1$

nen viec thay nhö tren van ñam bao trong $n$ bien co $n-1$ bien khong lôn hôn 1, ñieu ño cho phep viec thay the nhö tren co the thöc hien lien tiep. Tuy nhien, viec thay the nay chæ co the ñöôc thöc hien khong qua $n$ lan (vì co khong qua $n$ bang $x$). Do ño, sau mot so lan thay (khong qua $n$), ta ñöa ñöôc ve tröông hôp trong $n$ bien co $n-1$ bien khong lôn hôn 1 bang nhau.

Cuoi cung, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$f\left(x, x, ..., \frac{1}{x^{n-1}}\right) \ge 0 \ (0 < x \le 1)$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{n-1}{x} + x^{n-1} + \frac{k}{nx + \frac{1}{x^{n-1}}} - n - \frac{k}{n} \ge 0 \ (0 < x \le 1)$$

Ta co

$$g^{/}(x) = \frac{(n-1)(x^n - 1)}{x^2} . \left(\frac{(n-1)x^n - 1}{(n-1)x^n + 1}\right)^2 \le 0 \ \ \forall x \in (0,1]$$

$\Rightarrow g(x)$ nghòch bien tren $(0,1]$.

$\Rightarrow g(x) \ge g(1) = 0 \ \ \forall x \in (0,1]$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1$.

## Bai toan 16.

Cho $a,b,c \in R$ thoa $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$. Chöng minh rang

$$\frac{(a-2b)^2+(a-2c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(b-2c)^2+(b-2a)^2}{(c-a)^2}+\frac{(c-2a)^2+(c-2b)^2}{(a-b)^2} \geq 22$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\sum_{cyc}\frac{(a-2b)^2+(a-2c)^2}{(b-c)^2} \geq 22$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2-4(b+c)a+4b^2+4c^2}{(b-c)^2} \geq 22$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-2(b+c)a+2b^2+2c^2}{(b-c)^2} \geq 11$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2-2(b+c)a+(b+c)^2+(b-c)^2}{(b-c)^2} \geq 11$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{b+c-a}{b-c}\right)^2 \geq 8$$

Ñat $x=\dfrac{b+c-a}{b-c}, y=\dfrac{c+a-b}{c-a}, z=\dfrac{a+b-c}{a-b}$ thì ta co

$$(x-2)(y-2)(z-2)=(x+2)(y+2)(z+2)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx=-4$$

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$x^2+y^2+z^2 \geq 8$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq -2(xy+yz+zx)$$

$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \geq 0$ (ñung)

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 17. (APMO 2005)

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=8$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}+\frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}}+\frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}}\ge\frac{4}{3}$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\ge\frac{2}{2+x^2}\quad\forall x>0\qquad(*)$$

That vay, ta co

$$(*)\Leftrightarrow(2+x^2)^2\ge4(1+x^3)$$
$$\Leftrightarrow x^2(x-2)^2\ge0 \text{ (ñung)}$$

Vay (*) ñung.

Do ño

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}\ge\sum_{cyc}\frac{4a^2}{(2+a^2)(2+b^2)}=\frac{2S(a,b,c)}{36+S(a,b,c)}=\frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}}$$

trong ño $S(a,b,c)=2(a^2+b^2+c^2)+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$

Theo bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$a^2+b^2+c^2\ge3\sqrt[3]{(abc)^2}=12$$
$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge3\sqrt[3]{(abc)^4}=48$$
$$\Rightarrow S(a,b,c)\ge72$$

Do ño

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}}\ge\frac{2}{1+\frac{36}{S(a,b,c)}}\ge\frac{2}{1+\frac{36}{72}}=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=2$.

## Bai toan 18. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c \ge 0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{3b^2+3c^2-2bc}+\frac{b^2}{3c^2+3a^2-2ca}+\frac{c^2}{3a^2+3b^2-2ab}\ge\frac{2}{3}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{3b^2+3c^2-2bc}=\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2(3b^2+3c^2-2bc)}$$

$$\ge\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(3b^2+3c^2-2bc)}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{6(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)}\ge\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2+b^2+c^2)^2\ge 12(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-4abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 3\left[a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]+abc(a+b+c)\ge 0$$

Theo bat ñang thöc Schur thì

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\ge\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)$$

$$\ge 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \text{ (theo AM-GM)}$$

Vay ta co

$$3\left[a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]+abc(a+b+c)\ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c)=(t,t,0)$ $(t>0)$.

## Bai toan 18. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c \geq 0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^2}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^2}{a^2-ab+b^2}\geq 2$$

*Lôi giai.*

+ Cach 1.

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2-bc+c^2} &= \sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2(b^2-bc+c^2)}\\ &\geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{\sum\limits_{cyc}a^2(b^2-bc+c^2)}\\ &= \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)}\end{aligned}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-abc(a+b+c)}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^2 \geq 4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-2abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \left[a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]+abc(a+b+c)\geq 0$$

Theo bat ñang thöc Schur thì

$$\begin{aligned}a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c) &\geq \sum_{cyc}ab(a^2+b^2)\\ &\geq 2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2) \text{ (theo AM-GM)}\end{aligned}$$

Vay ta co

$$\left[a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)-2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\right]+abc(a+b+c)\geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c)=(t,t,0)$ $(t>0)$.

+ Cach 2.

Khong mat tính tong quat co the gia sö $0 \le a \le b \le c$.

Khi ño, ta co $\begin{cases} a^2 - ac \le 0 \\ a^2 - ab \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le c^2 - ca + a^2 \le c^2 \\ 0 \le a^2 - ab + b^2 \le b^2 \end{cases}$

Do ño

$$\frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^2}{a^2 - ab + b^2} \ge \frac{a^2}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

$$\ge \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{b^2} \ge 2 \text{ (theo AM-GM)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c) = (t,t,0)\ (t > 0)$.

Bai toan 19. (VMEO 2004)

Cho $x, y, z > 0$ thoa $x + y + z = 1$. Chöng minh rang

$$\sqrt{x + \frac{(y-z)^2}{12}} + \sqrt{y + \frac{(z-x)^2}{12}} + \sqrt{z + \frac{(x-y)^2}{12}} \le \sqrt{3}$$

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat co the gia sö $x \ge y \ge z > 0$

$$\Rightarrow 0 \le x - y \le x + y - 2z = 1 - 3z$$

Ta se chöng minh

$$\sqrt{x + u^2} + \sqrt{y + v^2} \le \sqrt{2(x+y) + (u+v)^2} \qquad (*)$$

trong ño $u = \dfrac{y-z}{\sqrt{12}}, v = \dfrac{x-z}{\sqrt{12}}$

That vay

$$(*) \Leftrightarrow x + y + 2uv \ge 2\sqrt{(x+u^2)(y+v^2)}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 + 4(u-v)(xv - yu) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 - \frac{1}{3}.(x-y)^2(x+y-z) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2(3+z-x-y) \geq 0 \text{ (ñuùng)}$$

Vaäy (*) ñuùng. Do ñoù

$$\sum_{cyc}\sqrt{x+\frac{(y-z)^2}{12}} \leq \sqrt{2(x+y)+\frac{(x+y-2z)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(x-y)^2}{12}}$$

$$\leq \sqrt{2(x+y)+\frac{(x+y-2z)^2}{12}}+\sqrt{z+\frac{(1-3z)^2}{12}} = \sqrt{3} \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

## Baøi toaùn 20.

Cho $x,y,z \geq 0$ thoûa $x+y+z=1$. Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc

$$f(x,y,z) = x^n y + y^n z + z^n x$$

trong ñoù $n \geq 2, n \in R$ laø haèng soá cho tröôùc.

*Lôøi giaûi.*

Giaû söû vôùi boä soá $(x_0,y_0,z_0)$ thì $f(x_0,y_0,z_0) = \max f$.

Khoâng maát tính toång quaùt coù theå giaû söû $x_0 = \max\{x_0,y_0,z_0\}$.

Khi ñoù, neáu $y_0 \leq z_0$ thì ta coù

$$f(x_0,z_0,y_0) - f(x_0,y_0,z_0) = (z_0-y_0)x_0^n + (y_0^n - z_0^n)x_0 + y_0 z_0^n - y_0^n z_0 = g(x_0)$$

Ta coù

$$g^{/}(x_0) = n(z_0-y_0)x_0^{n-1} + y_0^n - z_0^n \geq n(z_0-y_0)z_0^{n-1} + y_0^n - z_0^n = (n-1)(z_0^n - y_0^n) \geq 0$$

$\Rightarrow g(x_0)$ ñoàng bieán.

$\Rightarrow g(x_0) \geq g(z_0) = 0$

$\Rightarrow f(x_0,z_0,y_0) \geq f(x_0,y_0,z_0)$

Do ñoù, khoâng maát tính toång quaùt, ta chæ xeùt $x \geq y \geq z \geq 0$ laø ñuû.

Theo baát ñaúng thöùc Becnulli, ta coù

$$(x+z)^n = x^n.\left(1+\frac{z}{x}\right)^n \geq x^n.\left(1+\frac{nz}{x}\right) = x^n + nx^{n-1}z \geq 0$$

Do ñoù, ta coù

$$\begin{aligned}
f(x+z,y,0) &= (x+z)^n y \\
&\geq (x^n + nx^{n-1}z)y \\
&\geq (x^n + 2x^{n-1}z)y \quad \text{(do } n \geq 2\text{)} \\
&= x^n y + x^{n-1}yz + x^{n-1}yz \\
&\geq x^n y + y^n z + z^n x \quad \text{(do } x \geq y \geq z \geq 0\text{)} \\
&= f(x,y,z)
\end{aligned}$$

Ta laïi coù

$$\begin{aligned}
f(x+z,y,0) &= (x+z)^n y \\
&= (1-y)^n y \\
&= \frac{1}{n}.(ny).(1-y)^n \\
&\leq \frac{1}{n}.\left(\frac{ny+n(1-y)}{n+1}\right)^{n+1} \\
&= \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}
\end{aligned}$$

Do ñoù

$$f(x,y,z) \leq \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra chaúng haïn khi $x = \dfrac{n}{n+1}, y = \dfrac{1}{n+1}, z = 0$.

Keát luaän

$$\max f = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.$$

## Bai toan 21. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{a}{b\sqrt{ab}+2}+\frac{b}{c\sqrt{bc}+2}+\frac{c}{a\sqrt{ca}+2}$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$2P=\sum_{cyc}\frac{2a}{b\sqrt{ab}+2}=\sum_{cyc}\left(\frac{2a}{b\sqrt{ab}+2}-a\right)+\sum_{cyc}a$$

$$=3-\sum_{cyc}\frac{a^{3/2}b^{3/2}}{a^{1/2}b^{3/2}+2}$$

$$\geq 3-\sum_{cyc}\frac{a^{3/2}b^{3/2}}{3\sqrt[3]{a^{1/2}b^{3/2}}}\quad \text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$=3-\frac{1}{3}.\sum_{cyc}a^{4/3}b$$

$$\geq 3-\frac{1}{3}.\sum_{cyc}\frac{a^2+2ab+3a^{4/3}b^{4/3}}{6}\quad \text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$=3-\frac{1}{18}.\sum_{cyc}(a^2+2ab)-\frac{1}{6}.\sum_{cyc}a^{4/3}b^{4/3}$$

$$=3-\frac{1}{18}.(a+b+c)^2-\frac{1}{6}.\sum_{cyc}a^{4/3}b^{4/3}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{6}.\sum_{cyc}a^{4/3}b^{4/3}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{6}.\sum_{cyc}ab.a^{1/3}b^{1/3}$$

$$\geq\frac{5}{2}-\frac{1}{6}.\sum_{cyc}\frac{ab(a+b+1)}{3}$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{18}.\sum_{cyc}ab(4-c)$$

$$=\frac{5}{2}-\frac{1}{18}.(4(ab+bc+ca)-3abc)$$

Mat khac, ap dung bat ñang thöc Schur, ta co

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge \sum_{cyc} ab(a+b)$$
$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+3\sum_{cyc} ab(a+b)+6abc \ge 4\sum_{cyc} ab(a+b)+3abc$$
$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3 \ge 4\sum_{cyc} ab(a+b)+3abc$$
$$\Leftrightarrow 27 \ge 4\sum_{cyc} ab(3-c)+3abc$$
$$\Leftrightarrow 27 \ge 12(ab+bc+ca)-9abc$$
$$\Rightarrow 4(ab+bc+ca)-3abc \le 9$$
$$\Rightarrow 2P \ge \frac{5}{2}-\frac{1}{18}.(4(ab+bc+ca)-3abc) \ge \frac{5}{2}-\frac{1}{18}.9=2$$
$$\Rightarrow P \ge 1$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

Vay $\min P=1$.

Bai toan 22. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$27+\left(\frac{b^2c^2}{a^4}+2\right)\left(\frac{c^2a^2}{b^4}+2\right)\left(\frac{a^2b^2}{c^4}+2\right) \ge 36\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

Bo ñe. $x,y,z>0$. Khi ño, ta co

$$(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2) \ge 9(xy+yz+zx)$$

*Chöng minh.*

Theo nguyen ly Dirichlet, ta co trong 3 so $x^2-1, y^2-1$ va $z^2-1$ luon ton tai ít nhat 2 so cung dau. Khong mat tính tong quat co the gia sö $x^2-1$ va $y^2-1$ cung dau.

$$\Rightarrow (x^2-1)(y^2-1) \ge 0$$
$$\Rightarrow x^2y^2 \ge x^2+y^2-1$$

$$\Rightarrow x^2y^2+2x^2+2y^2+4\ge 3(x^2+y^2+1)$$
$$\Leftrightarrow (x^2+2)(y^2+2)\ge 3(x^2+y^2+1)$$

Do ño

$$\begin{aligned}(x^2+2)(y^2+2)(z^2+2)&\ge 3(x^2+y^2+1)(z^2+2)\\ &=3(x^2+y^2+1)(1+1+z^2)\\ &\ge 3(x+y+z)^2 \text{ (theo bñt Bunhiacopxki)}\\ &\ge 9(xy+yz+zx)\end{aligned}$$

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x=y=z=1$.

Trô lai bai toan cua ta

Ap dung Bo ñe tren vôi $x=\dfrac{bc}{a^2},y=\dfrac{ca}{b^2},z=\dfrac{ab}{c^2}$, ta co

$$\left(\frac{b^2c^2}{a^4}+2\right)\left(\frac{c^2a^2}{b^4}+2\right)\left(\frac{a^2b^2}{c^4}+2\right)\ge 9\left(\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}+\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}+\frac{ab}{c^2}.\frac{bc}{a^2}\right)=\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

Do ño, ta chæ can chöng minh

$$27+\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{abc}\ge 36\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$
$$\Leftrightarrow 3+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}\ge 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

Chu y rang

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}=\frac{(a+b+c).\sum_{cyc}(a-b)^2}{2abc}+3$$

$$2\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+3$$

Do ño

$$3+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}-4.\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}=$$

$$= 3+3+\frac{(a+b+c).\sum\limits_{cyc}(a-b)^2}{2abc}-2\left(\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}+3\right)$$

$$= \frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2((a+b+c)(a+c)(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)}$$

$$\geq \frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2((a+c)^2(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)}$$

$$\geq \frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(4ac(b+c)-4abc)}{abc(a+c)(b+c)} \text{ (theo bñt AM-GM)}$$

$$= 2.\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{b(a+c)(b+c)}$$

$$\geq 0$$

$$\Rightarrow 3+\frac{a^3+b^3+c^3}{abc} \geq 4\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right)$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

## Baøi toaùn 23. (Voõ Quoác Baù Caån)

Cho $0 \leq x,y,z \leq \frac{1}{2}$ thoûa $x+y+z=1$. Chöùng minh raèng

$$\frac{1}{4} \leq x^3+y^3+z^3+4xyz \leq \frac{9}{32}$$

*Lôøi giaûi.*

Tröôùc heát, ta chöùng minh

$$x^3+y^3+z^3+4xyz \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4x^3+4y^3+4z^3+16xyz \geq (x+y+z)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3+\frac{10}{3}xyz \geq \sum_{cyc}xy(x+y) \qquad (*)$$

Theo bñt Schur thì

$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq \sum_{cyc}xy(x+y)$$

$\Rightarrow$ (*) ñung.

Tiep theo, ta se chöng minh

$$x^3+y^3+z^3+4xyz\le\frac{9}{32}$$

$$\Leftrightarrow 3(xy+yz+zx)-7xyz\ge\frac{23}{32}$$

$$\Leftrightarrow 3x(y+z)+yz(3-7x)\ge\frac{23}{32}$$

Khong mat tính tong quat gia sö $x\ge y\ge z\Rightarrow\frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{2}$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $\frac{1}{3}\le x\le\frac{3}{7}\Rightarrow 0\le z\le y\le\frac{3}{7}$

$$\Rightarrow\left(\frac{3}{7}-y\right)\left(\frac{3}{7}-z\right)\ge 0$$

$$\Rightarrow yz\ge-\frac{9}{49}+\frac{3}{7}(y+z)=-\frac{9}{49}+\frac{3}{7}(1-x)=\frac{12}{49}-\frac{3}{7}x$$

Do ño

$$3x(y+z)+(3-7x)yz\ge 3x(1-x)+(3-7x)\left(\frac{12}{49}-\frac{3}{7}x\right)=\frac{36}{49}>\frac{23}{32}$$

* Tröông hôp 2. $\frac{3}{7}\le x\le\frac{1}{2}$. Khi ño ta co

$$3x(y+z)+(3-7x)yz\ge 3x(1-x)+\frac{1}{4}(y+z)^2(3-7x)\quad\text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$=3x(1-x)+\frac{1}{4}(1-x)^2(3-7x)$$

$$=\frac{1}{32}(1-2x)(28x^2-6x+1)+\frac{23}{32}\ge\frac{23}{32}\quad\left(\text{do } x\le\frac{1}{2}\right)$$

Tom lai, ta luon co

$$\frac{1}{4}\le x^3+y^3+z^3+4xyz\le\frac{9}{32}\quad\text{(ñpcm)}$$

## Bai toan 24. (Jack Grafunkel)

Tìm hang soi $k$ nhoi nhat sao cho bat ñang thöc sau ñuing vôi moi $x, y, z \geq 0$

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}}+\frac{y}{\sqrt{y+z}}+\frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq k\sqrt{x+y+z}$$

*Lôi giai.*

Ta sei chöng minh bat ñang thöc ñai cho ñuing khi $k=\frac{5}{4}$. Ñay chính lai hang soi tot nhat cuia bat ñang thöc ñai cho vì ta coi ñang thöc xay ra khi $x=0, y=3, z=1$.

Ñat $x+y=c^2, y+z=a^2, z+x=b^2$ $(a,b,c \geq 0)$ $\Rightarrow$ $a^2, b^2, c^2$ lai ñoi dai ba cainh cuia mot tam giac (coi thei suy bien).

Bat ñang thöc can chöng minh trôi thanh

$$\frac{-a^2+b^2+c^2}{c}+\frac{a^2-b^2+c^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b} \leq \frac{5}{2\sqrt{2}}.\sqrt{a^2+b^2+c^2} \quad (1)$$

Khoing mat tính toing quat, ta coi thei giai söi $a \geq b, c$.

Ap duing bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta coi

$$\frac{a+\sqrt{b^2+c^2}}{\sqrt{2}} \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

Do ñoi, ñei chöng minh (1), ta chæ can chöng minh

$$\frac{-a^2+b^2+c^2}{c}+\frac{a^2-b^2+c^2}{a}+\frac{a^2+b^2-c^2}{b} \leq \frac{5}{4}.\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow a+b+c+\frac{(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b)}{abc} \leq \frac{5}{4}.\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4abc(a+b+c)+4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \leq 5abc\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

Töi ñay suy ra khoing mat tính toing quat, ta chæ can xeit tröông hôip $a \geq c \geq b$ lai ñui.

Ta coi

$$4abc(a+b+c)+4(a+b+c)(a-b)(a-c)(c-b) \leq 5abc\left(a+\sqrt{b^2+c^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(a) = 4a^3(c-b) - a^2bc + 4bc(c^2-b^2) +$$
$$+a\left(4b^3 + 4b^2c + 4bc^2 - 4c^3 - 5bc\sqrt{b^2+c^2}\right) \le 0$$

Do $a^2, b^2, c^2$ laø ñoä daøi ba caïnh cuûa moät tam giaùc (coù theå suy bieán) neân ta coù $a \le \sqrt{b^2+c^2}$. Do ñoù, ta caàn chöùng minh $f(a) \le 0$ vôùi $b \le c \le a \le \sqrt{b^2+c^2}$ (2).

+ Neáu $b = c$ thì

$$f(a) = -ab^2\left[(a-b) + \left(5\sqrt{2}-7\right)b\right] \le 0$$

+ Neáu $b < c$ thì $f(a)$ laø moät haøm ña thöùc baäc ba coù heä soá cao nhaát vaø thaáp nhaát döông. Ta coù

$$\lim_{a\to-\infty} f(a) = -\infty$$
$$f(0) > 0$$
$$\lim_{a\to+\infty} f(a) = +\infty$$

Ta laïi coù

$$f(c) = -bc^2\left(5\sqrt{b^2+c^2} - 4b - 3c\right) < 0$$

Vì $25(b^2+c^2) - (3c+4b)^2 = (3b-4c)^2 > 0$

Ngoaøi ra,

$$f\left(\sqrt{b^2+c^2}\right) = 2bc\left(4b\sqrt{b^2+c^2} - 5b^2 - c^2\right)$$
$$= -2bc\left(\sqrt{b^2+c^2} - 2b\right)^2$$
$$\le 0$$

Do ñoù $f$ coù ba nghieäm phaân bieät (1 nghieäm aâm, 1 nghieäm thuoäc $(0,c)$ vaø 1 nghieäm khoâng nhoû hôn $\sqrt{b^2+c^2}$). Do $c \le a \le \sqrt{b^2+c^2}$ neân $f(a) \le 0$.

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $\begin{cases} a=\sqrt{b^2+c^2} \\ \sqrt{b^2+c^2}=2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=1 \end{cases}$

Vay

$$k_{\min}=\frac{5}{4}.$$

Bai toan 25.

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$\frac{b+c}{a^3+bc}+\frac{c+a}{b^3+ca}+\frac{a+b}{c^3+ab}\le\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

*Lôi giai.*

Tröôc het, ta chöng minh cac Bo ñe sau

Bo ñe 1. $x,y,z>0$. Khi ño, ta co

$$(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2\ge 4(xy+yz+zx)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

*Chöng minh.*

Ta co

$$(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2-4(xy+yz+zx)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)=$$
$$=\sum_{cyc}x^2y^2(x-y)^2+2xyz(x^3+y^3+z^3+3xyz-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x))$$

Do $\begin{cases} \sum_{cyc}x^2y^2(x-y)^2\ge 0 \\ x^3+y^3+z^3+3xyz-xy(x+y)-yz(y+z)-zx(z+x)\ge 0 \text{ (theo bñt Schur)} \end{cases}$

Nen

$$(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2-4(xy+yz+zx)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)\ge 0$$
$$\Rightarrow (xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2\ge 4(xy+yz+zx)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)$$

Bo ñe 1 ñöôc chöng minh hoan toan.

**Boå ñeà 2.** $x, y, z > 0$. Khi ñoù, ta coù

$$\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}+\frac{y^2(z+x)}{y^2+2zx}+\frac{z^2(x+y)}{z^2+2xy}\le\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

*Chöùng minh.*

Ta coù

$$\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}=y+z-\frac{2yz(y+z)}{x^2+2yz}$$
$$\frac{y^2(z+x)}{y^2+2zx}=z+x-\frac{2zx(z+x)}{y^2+2zx}$$
$$\frac{z^2(x+y)}{z^2+2xy}=x+y-\frac{2xy(x+y)}{z^2+2xy}$$

Do ñoù

$$\sum_{cyc}\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}=2\left((x+y+z)-\sum_{cyc}\frac{yz(y+z)}{x^2+2yz}\right)$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}\le\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow(x+y+z)-\sum_{cyc}\frac{yz(y+z)}{x^2+2yz}\le\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{yz(y+z)}{x^2+2yz}\ge x+y+z-\frac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{yz(y+z)}{x^2+2yz}\ge\frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z}$$

AÙp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki, ta coù

$$\sum_{cyc}\frac{yz(y+z)}{x^2+2yz}=\sum_{cyc}\frac{(xy(x+y))^2}{(z^2+2xy)xy(x+y)}$$
$$\ge\frac{(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2}{\sum_{cyc}(z^2+2xy)xy(x+y)}$$

$$= \frac{(xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x))^2}{2(x+y+z)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}$$

$$\geq \frac{2(xy+yz+zx)}{x+y+z} \text{ (theo Bo ñe 1)}$$

Bo ñe 2 ñöôc chöng minh hoan toan.

Bo ñe 3. $a,b,c>0$. Khi ño, ta co

$$\frac{b+c}{a^3+bc.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}}+\frac{c+a}{b^3+ca.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}}+\frac{a+b}{c^3+ab.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} \leq \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

*Chöng minh.*

Ñat $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c} \Rightarrow x,y,z>0$. Khi ño, ta co

$$\frac{b+c}{a^3+bc.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} = \frac{x^3(y+z)(x+y+z)}{2x^3+(x^3+yz^2+y^2z+xyz)}$$

$$\leq \frac{x^3(y+z)(x+y+z)}{2x^3+4xyz} \text{ (theo bñt AM-GM)}$$

$$= \frac{x+y+z}{2}.\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}$$

Töông tö, ta co

$$\frac{c+a}{b^3+ca.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} \leq \frac{x+y+z}{2}.\frac{y^2(z+x)}{y^2+2zx}$$

$$\frac{a+b}{c^3+ab.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} \leq \frac{x+y+z}{2}.\frac{z^2(x+y)}{z^2+2xy}$$

Do ño

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a^3+bc.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} \leq \frac{x+y+z}{2}.\sum_{cyc}\frac{x^2(y+z)}{x^2+2yz}$$

$$\le \frac{x+y+z}{2}.\frac{2(x^2+y^2+z^2)}{x+y+z} \text{ (theo Bo ñe 2)}$$
$$= x^2+y^2+z^2$$
$$= \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Bo ñe 3 ñöôc chöng minh hoan toan.

Trô lai bai toan cua ta

Ap dung bat ñang thöc AM-HM, ta co

$$\sqrt[3]{abc} \ge \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \Rightarrow 1 \ge \frac{3}{1/a+1/b+1/c} \text{ (do } abc=1)$$

Do ño

$$\sum_{cyc}\frac{b+c}{a^3+bc} \le \sum_{cyc}\frac{b+c}{a^3+bc.\frac{3}{1/a+1/b+1/c}} \le \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2} \text{ (theo Bo ñe 3)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

## Bai toan 26. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c \ge 0$ thoa $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}} \ge \sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}}}}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x=\sqrt{\frac{a(b+c)}{a^2+bc}}, y=\sqrt{\frac{b(c+a)}{b^2+ca}}, z=\sqrt{\frac{c(a+b)}{c^2+ab}}$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$x+y+z \ge \sqrt{2+2\sqrt{1+4xyz}}$$

Ta se chöng minh

$$x^2+y^2+z^2 \ge 2 \qquad (1)$$
$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \ge 1 \qquad (2)$$

Khi ñoù, ta coù

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &= x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)\\ &\ge 2+2(xy+yz+zx)\\ &= 2+2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)}\\ &\ge 2+2\\ &= 4\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x+y+z\ge 2$$

Vaø do ñoù

$$\begin{aligned}(x+y+z)^2 &\ge 2+2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+2xyz(x+y+z)}\\ &\ge 2+2\sqrt{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+4xyz}\\ &\ge 2+2\sqrt{1+4xyz}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x+y+z\ge\sqrt{2+2\sqrt{1+4xyz}}$$

Ñaây chính laø ñieàu chuùng ta caàn phaûi chöùng minh.

Vaäy nhieäm vuï cuûa chuùng ta baây giôø chæ laø chöùng minh tính ñuùng ñaén cuûa caùc baát ñaúng thöùc (1) vaø (2) nöõa thoâi.

* Chöùng minh (1).

$$(1)\Leftrightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\ge 2$$

Ta coù

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}-2=\frac{(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\ge 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{a^2+bc}\ge 2$$

Vaäy (1) ñuùng.

* Chöùng minh (2).

$$(2)\Leftrightarrow \frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}+\frac{bc(b+a)(c+a)}{(b^2+ca)(c^2+ab)}+\frac{ca(c+b)(a+b)}{(c^2+ab)(a^2+bc)}\ge 1$$

Ta co

$$\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}-1=\frac{2abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+bc)(b^2+ca)(c^2+ab)}\geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+bc)(b^2+ca)}\geq 1$$

Vay (2) ñung.

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c)=(t,t,0)$ $(t>0)$.

## Bai toan 27. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoa $a+b+c=1$ va $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2+5b}{b+c}+\frac{b^2+5c}{c+a}+\frac{c^2+5a}{a+b}\geq 8$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

**Bo ñe.** $x,y,z$ la cac so thöc thoa $\begin{cases}x+y+z\geq 0\\ xy+yz+zx\geq 0\end{cases}$. Khi ño, ta co

$$x(b-c)^2+y(c-a)^2+z(a-b)^2\geq 0 \quad \forall a,b,c\in R$$

Bo ñe tren chöng minh rat ñôn gian (chæ can dung tam thöc bac hai la ñöôc) nen ô ñay ta khong nhac lai chöng minh cua no.

Trô lai bai toan cua ta

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\left(\sum_{cyc}\frac{2a^2}{b+c}-1\right)+5\left(\sum_{cyc}\frac{2a}{a+b}-3\right)\geq 0$$

Chu y rang

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2}{b+c}=a+b+c+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}=1+\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)} \quad \text{(theo gt)}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2}{b+c}-1=\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}$$

$$\sum_{cyc}\frac{2a}{a+b}=3-\frac{\sum_{cyc}(a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{2a}{a+b}-3=-\frac{\sum_{cyc}(a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{5\sum_{cyc}(a-b)^3}{3(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(4b-a)\geq 0$$

Ñat $S_a=4c-b, S_b=4a-c, S_c=4b-a$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $a\geq b\geq c\geq 0\Rightarrow S_b\geq 0$. Khi ño, ta co

$$S_a+S_b=4a-b+3c\geq 0$$
$$S_b+S_c=3a+4b-c\geq 0$$

Chu y rang $(a-c)^2\geq (a-b)^2+(b-c)^2$. Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq (S_a+S_b)(b-c)^2+(S_b+S_c)(a-b)^2\geq 0$$

* Tröông hôp 2. $0\leq a\leq b\leq c\Rightarrow S_a,S_c\geq 0$. Neu $S_b\geq 0$ thì ta co ngay ñpcm, do ño ta chæ can xet $S_b\leq 0$ la ñu.

+ Tröông hôp 2.1. $2b\geq c$. Khi ño, ta co:

$$S_a+2S_b=8a-b+2c\geq 0$$
$$S_c+2S_b=6a+4b-2c\geq 0$$

Mat khac, theo bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$(c-a)^2 \le 2(a-b)^2 + 2(b-c)^2$$

Do ño

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

+ Tröông hôp 2.2. $c \ge 2b$

- Tröông hôp 2.2.1. $a + \left(\sqrt{3}-1\right)c \ge \sqrt{3}b \Leftrightarrow 3(b-c)^2 \ge (c-a)^2$.

Khi ño, ta co

$$S_a + 3S_b = 12a - b + c \ge 0$$

Do ño

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 3S_b)(b-c)^2 \ge 0$$

- Tröông hôp 2.2.2. $a + \left(\sqrt{3}-1\right)c \le \sqrt{3}b \Rightarrow b \ge \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.c \ge \dfrac{2c}{5}$

Khi ño, ta co

$$S_a + S_b + S_c = 3(a+b+c) \ge 0$$

$$\begin{aligned}
S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a &= (4c-b)(4a-c) + (4a-c)(4b-a) + (4b-a)(4c-b)\\
&= 13(ab+bc+ca) - 4(a^2+b^2+c^2)\\
&\ge 13bc - 4(b^2+c^2)\\
&\ge 13.\frac{2c}{5}.c - 4\left(c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right)\\
&= \frac{c^2}{5}\\
&\ge 0
\end{aligned}$$

Ap dung bo ñe tren vôi $x = S_a, y = S_b, z = S_c$, ta suy ra

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bai toan 28. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c\ge 0$ thoa $(a+b)(b+c)(c+a)>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a(b+c)}{a^2+bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+ab}\ge 2$$

*Lôi giai.*

Ta co 2 cach giai

* Cach 1. (tham khao lôi giai bai toan 26)

* Cach 2.

Khong mat tính tong quat co the gia sö $a\ge b\ge c$.

Bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{(b-c)(a-c)}{c^2+ab}\le\frac{b(c+a)}{b^2+ca}$$

Ta co

$$\begin{aligned}\frac{(a-b)(a-c)}{a^2+bc}+\frac{(b-c)(a-c)}{c^2+ab}&=(a-c)\left(\frac{a-b}{a^2+bc}+\frac{b-c}{c^2+ab}\right)\\&\le(a-c)\left(\frac{a-b}{a^2}+\frac{b-c}{ab}\right)\\&=\frac{(a-c)(2ab-b^2-ac)}{a^2b}\\&\le\frac{2ab-b^2-ac}{ab}\end{aligned}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{2ab-b^2-ac}{ab}\le\frac{b(c+a)}{b^2+ca}$$

$$\Leftrightarrow(2ab-b^2-ac)(b^2+ca)\le ab^2(c+a)$$

$\Leftrightarrow(a-b)^2b^2+a^2c^2\ge 2(a-b)bac$ (ñung theo bñt AM-GM)

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $(a,b,c)=(t,t,0)$ $(t>0)$.

## Baøi toaùn 29. (Phaïm Kim Huøng)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoûa $a+b+c=2$. Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc

$$P=(a^2-ab+b^2)(b^2-bc+c^2)(c^2-ca+a^2)$$

*Lôøi giaûi.*

Khoâng maát tính toång quaùt giaû söû $a\geq b\geq c\geq 0$. Khi ñoù, ta coù

$$0\leq a^2-ac+c^2\leq a^2$$
$$0\leq b^2-bc+c^2\leq b^2$$

Do ñoù

$P\leq a^2b^2(a^2-ab+b^2)=v^2(u^2-3v)$ (trong ñoù $u=a+b,v=ab$)

AÙp duïng baát ñaúng thöùc AM-GM, ta coù

$$P\leq v^2(u^2-3v)\leq \frac{4}{9}.\left(\frac{\frac{3v}{2}+\frac{3v}{2}+u^2-3v}{3}\right)^3=\frac{4u^6}{243}=\frac{4(a+b)^6}{243}\leq\frac{4(a+b+c)^6}{243}=\frac{2^8}{243}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=\frac{4}{3},b=\frac{2}{3},c=0$ vaø caùc hoaùn vò.

Vaäy

$$\max P=\frac{2^8}{243}$$

## Baøi toaùn 30. (Voõ Quoác Baù Caån)

Cho $x,y,z>0$ thoûa $xy+yz+zx+xyz=4$. Chöùng minh raèng

$$\frac{1}{5x+1}+\frac{1}{5y+1}+\frac{1}{5z+1}\geq\frac{1}{2}$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù

$$\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}=$$

$$=\frac{(2+x)(2+y)+(2+y)(2+z)+(2+z)(2+x)}{(2+x)(2+y)(2+z)}$$
$$=\frac{12+4(x+y+z)+(xy+yz+zx)}{8+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz}$$
$$=\frac{8+4(x+y+z)+(xy+yz+zx)+4}{8+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz}$$
$$=\frac{8+4(x+y+z)+(xy+yz+zx)+(xy+yz+zx+xyz)}{8+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz} \text{ (theo gt)}$$
$$=\frac{8+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz}{8+4(x+y+z)+2(xy+yz+zx)+xyz}$$
$$=1$$

Vay $\frac{1}{2+x}+\frac{1}{2+y}+\frac{1}{2+z}=1$

Ñat $a=\frac{1}{2+x}, b=\frac{1}{2+y}, c=\frac{1}{2+z}$ thì ta co $\begin{cases} 0<a,b,c<\frac{1}{2} \\ a+b+c=1 \\ x=\frac{1-2a}{a}, y=\frac{1-2b}{b}, z=\frac{1-2c}{c} \end{cases}$

Do ño

$$\frac{1}{5x+1}=\frac{1}{\frac{5(1-2a)}{a}+1}=\frac{a}{5-9a}$$

Töông tö, ta co

$$\frac{1}{5y+1}=\frac{a}{5-9b}$$
$$\frac{1}{5z+1}=\frac{c}{5-9c}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5x+1}+\frac{1}{5y+1}+\frac{1}{5z+1}=\frac{a}{5-9a}+\frac{b}{5-9b}+\frac{c}{5-9c}$$
$$=\frac{1}{9}.\left(\frac{9a}{5-9a}+\frac{9b}{5-9b}+\frac{9c}{5-9c}\right)$$
$$=\frac{1}{9}.\left(\frac{(9a-5)+5}{5-9a}+\frac{(9b-5)+5}{5-9b}+\frac{(9c-5)+5}{5-9c}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{9}.\left(\frac{1}{5-9a} + \frac{1}{5-9b} + \frac{1}{5-9c}\right)$$
$$\geq -\frac{1}{3} + \frac{5}{9}.\frac{9}{(5-9a)+(5-9b)+(5-9c)}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{15-9(a+b+c)}$$
$$= -\frac{1}{3} + \frac{5}{15-9}$$
$$= \frac{1}{2}$$

Vay

$$\frac{1}{5x+1} + \frac{1}{5y+1} + \frac{1}{5z+1} \geq \frac{1}{2} \quad \text{(ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x = y = z = 1$.

* Nhan xet.

Co the ñay la mot bai toan khong kho nhöng ñieu ñac sac cua no chính la ô cho tö gia thiet $xy + yz + zx + xyz = 4$ ta co the suy ra ñöôc ñang thöc

$$\frac{1}{2+x} + \frac{1}{2+y} + \frac{1}{2+z} = 1$$

Va chính nhô ñang thöc nay ma bai toan cua ta ña trô nen cöc ky ñôn gian. Bang cach sö dung ñang thöc nay, ta co the de dang chöng minh ñöôc cac ket qua sau

(1) $x + y + z \geq xy + yz + zx$

(2) $\frac{1}{2+x^m} + \frac{1}{2+y^m} + \frac{1}{2+z^m} \leq \frac{1}{2+x^n} + \frac{1}{2+y^n} + \frac{1}{2+z^n} \quad \forall m > 1 > n > 0$

Bai toan 31. (Voi Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{(b+c-a)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(c+a-b)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(a+b-c)^2}{2c^2+(a+b)^2}\geq\frac{3(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)^2}$$

*Lôi giai.*

Do cai hai vei cua bat ñang thöc ñai cho ñong bac nen khong mat tính tong quat, ta coi the gia söi $a+b+c=3$.

Khi ñoi, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{(3-2a)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(3-2b)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(3-2c)^2}{2c^2+(3-c)^2}\geq\frac{1}{6}.(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\geq a^2+b^2+c^2$$

Ta sei chöng minh

$$\frac{2(3-2x)^2}{x^2-2x+3}\geq x^2-6x+6\quad\forall x\in(0,3)\qquad(*)$$

That vay

$$(*)\Leftrightarrow 2(3-2x)^2\geq(x^2-6x+6)(x^2-2x+3)$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)^2(6-x)\geq 0$$ (ñuing do $0<x<3$)

Vay (*) ñuing.

Do ñoi, ta coi

$$\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}\geq a^2-6a+6$$

$$\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}\geq b^2-6b+6$$

$$\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\geq c^2-6c+6$$

$$\Rightarrow\frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\geq a^2+b^2+c^2-6(a+b+c)+18$$

$$=a^2+b^2+c^2$$

$$\Rightarrow \frac{2(3-2a)^2}{a^2-2a+3}+\frac{2(3-2b)^2}{b^2-2b+3}+\frac{2(3-2c)^2}{c^2-2c+3}\ge a^2+b^2+c^2 \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c.$

## Baøi toaùn 32. (Voõ Quoác Baù Caån)

Cho $a,b,c>0$. Chöùng minh raèng

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{3}.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\right)\ge 4$$

*Lôøi giaûi.*

Do hai veá cuûa baát ñaúng thöùc ñaõ cho ñoàng baäc neân khoâng maát tính toång quaùt, ta coù theå giaû söû $a^2+b^2+c^2=3.$ Ñaët $p=ab+bc+ca$ thì ta coù $0<p\le 3.$

Khi ñoù, ta coù

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{3}.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\right)=$$

$$=\frac{3}{p}+\frac{1}{3}.\left(\frac{a+b+c}{abc}.(3-p)+3+\frac{2(3+2p)}{3}\right)$$

$$=\frac{3}{p}+\frac{1}{3}.\left(\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).(3-p)+\frac{4p}{3}+5\right)$$

$$\ge\frac{3}{p}+\frac{1}{3}.\left(\frac{9}{p}.(3-p)+\frac{4p}{3}+5\right)$$

$$=\frac{12}{p}+\frac{4p}{9}-\frac{4}{3}$$

$$=\frac{8}{p}+4\left(\frac{1}{p}+\frac{p}{9}\right)-\frac{4}{3}$$

$$\ge\frac{8}{3}+4.2\sqrt{\frac{1}{p}.\frac{p}{9}}-\frac{4}{3} \text{ (theo bñt AM-GM)}$$

$$=4$$

$$\Rightarrow\frac{a^2+b^2+c^2}{ab+bc+ca}+\frac{1}{3}.\left(\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}+\frac{2(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2}\right)\ge 4 \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c.$

## Bai toan 33. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{a\sqrt{3a+2b}}+\frac{1}{b\sqrt{3b+2c}}+\frac{1}{c\sqrt{3c+2a}}\ge\frac{3}{\sqrt{5abc}}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x=\frac{1}{a},y=\frac{1}{b},z=\frac{1}{c}$ thì ta co $x,y,z>0.$ Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{x}{\sqrt{3zx+2yz}}+\frac{y}{\sqrt{3xy+2zx}}+\frac{z}{\sqrt{3yz+2xy}}\ge\frac{3}{\sqrt{5}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{x}{\sqrt{5z}.\sqrt{3x+2y}}+\frac{y}{\sqrt{5x}.\sqrt{3y+2z}}+\frac{z}{\sqrt{5y}.\sqrt{3z+2x}}\ge\frac{3}{5}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM va bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\frac{x}{\sqrt{5z}.\sqrt{3x+2y}}+\frac{y}{\sqrt{5x}.\sqrt{3y+2z}}+\frac{z}{\sqrt{5y}.\sqrt{3z+2x}}\ge$$

$$\ge 2\left(\frac{x}{3x+2y+5z}+\frac{y}{5x+3y+2z}+\frac{z}{2x+5y+3z}\right)$$

$$\ge\frac{2(x+y+z)^2}{x(3x+2y+5z)+y(5x+3y+2z)+z(2x+5y+3z)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+7(xy+yz+zx)}$$

$$=\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{3}.(xy+yz+zx)+\frac{20}{3}.(xy+yz+zx)}$$

$$\ge\frac{2(x+y+z)^2}{3(x^2+y^2+z^2)+\frac{1}{3}.(x^2+y^2+z^2)+\frac{20}{3}.(xy+yz+zx)}$$

$$=\frac{3(x+y+z)^2}{5(x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx)}=\frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{x}{\sqrt{5z}.\sqrt{3x+2y}}+\frac{y}{\sqrt{5x}.\sqrt{3y+2z}}+\frac{z}{\sqrt{5y}.\sqrt{3z+2x}}\ge\frac{3}{5}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$.

Bai toan 34. (R. Stanojevic )

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}+\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}\ge\sqrt{2}$$

*Lôi giai.*

Do $abc=1$ nen ton tai cac so $x,y,z>0$ sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{z}{x}, c=\frac{y}{z}$, chang han $x=\sqrt[3]{ca^2}, y=\sqrt[3]{bc^2}, z=\sqrt[3]{ab^2}$. Khi ño, ta co

$$\frac{1}{\sqrt{a+\frac{1}{c}+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2y}{2x+y+2z}}$$

Töông tö, ta co

$$\frac{1}{\sqrt{c+\frac{1}{b}+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2z}{2x+2y+z}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}}}=\sqrt{\frac{2x}{x+2y+2z}}$$

Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\sqrt{\frac{x}{x+2y+2z}}+\sqrt{\frac{y}{y+2z+2x}}+\sqrt{\frac{z}{z+2x+2y}}\ge 1$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\sqrt{\frac{x}{x+2y+2z}}=\frac{2x}{2\sqrt{x}.\sqrt{x+2y+2z}}\ge\frac{2x}{x+(x+2y+2z)}=\frac{x}{x+y+z}$$

Töông tö, ta co

$$\sqrt{\frac{y}{y+2z+2x}} \ge \frac{y}{x+y+z}$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+2x+2y}} \ge \frac{z}{x+y+z}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{x+2y+2z}} + \sqrt{\frac{y}{y+2z+2x}} + \sqrt{\frac{z}{z+2x+2y}} \ge$$

$$\ge \frac{x}{x+y+z} + \frac{y}{x+y+z} + \frac{z}{x+y+z} = 1$$

$\Rightarrow$ đpcm.

## Bài toán 35. (Taiwanese Mathematical Olympiad 1992)

Cho $n \ge 3, n \in N$ và $x_1, x_2, ..., x_n \ge 0$ thỏa $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$. Chứng minh rằng

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_n^2 x_1 \le \frac{4}{27}$$

*Lời giải.*

Đặt $f(x_1, x_2, ..., x_n) = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_n^2 x_1$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x_1 = \max x_i \ \ (i = \overline{1,n})$.

Gọi $x_k = \max x_i \ \ (i = \overline{2,n})$.

Khi đó, ta có

$$f(1-x_k, x_k, \underbrace{0,0,...,0}_{n-2 \text{ số } 0}) = f(x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n, x_k, \underbrace{0,0,...,0}_{n-2 \text{ số } 0})$$

$$= (x_1 + x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n)^2 x_k$$

$$\ge (x_1^2 + 2x_1(x_2 + ... + x_{k-1} + x_{k+1} + ... + x_n))x_k$$

$$\ge x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + ... + x_n^2 x_1 \quad (\text{do } x_1 \ge x_k = \max x_i \ \ (i = \overline{2,n}))$$

$$= f(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ta lại có

$$f(1-x_k, x_k, \underbrace{0,0,...,0}_{n-2 \text{ số } 0}) = (1-x_k)^2 x_k = \frac{1}{2}.(2x_k).(1-x_k)^2 \le \frac{1}{2}.\left(\frac{2x_k + 2(1-x_k)}{3}\right)^3 = \frac{4}{27}$$

Vay $f(x_1, x_2, ..., x_n) \le \dfrac{4}{27}$ (ñpcm).

## Bai toan 36.

Cho $a,b,c \ge 0$ thoa $a+b+c+abc=1$. Chöng minh rang

$$ab+bc+ca \le \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc}$$

*Lôi giai.*

Ñat $m = \dfrac{a+b+c}{3} \Rightarrow 3m + abc = 1.$ Khi ño, ta co

$$A = \frac{(2+abc)(1+2abc)}{7-abc} = \frac{(3-3m)(3-6m)}{6+3m} = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m}$$

$$\Rightarrow A - 3m^2 = \frac{3(1-m)(1-2m)}{2+m} - 3m^2 = \frac{3(1-3m-m^3)}{2+m} = \frac{3(abc-m^3)}{2+m}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3(abc-m^3)}{2+m} + 3m^2$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{3(abc-m^3)}{2+m} + 3m^2 \ge ab+bc+ca$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - ab - bc - ca \ge \frac{3(m^3-abc)}{2+m}$$

$$\Leftrightarrow 3(a+b+c)^2 - 9(ab+bc+ca) \ge \frac{(a+b+c)^3 - 27abc}{2+m}$$

$$\Leftrightarrow 3(2+m)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)) \ge (a+b+c)^3 - 27abc$$

Do $3m + abc = 1$ nen $m \le \dfrac{1}{3} \Rightarrow 2 + m \ge 7m = \dfrac{7(a+b+c)}{3} \ge \dfrac{4(a+b+c)}{3}$.

Do ño, ta chæ can chöng minh

$$4(a+b+c)((a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca)) \ge (a+b+c)^3 - 27abc$$

$$\Leftrightarrow 4\left(\sum_{cyc} a^3 - 3abc\right) \ge \sum_{cyc} a^3 + 3\sum_{cyc} ab(a+b) - 21abc$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc} a^3 + 9abc \ge 3\sum_{cyc} ab(a+b)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^3 + 3abc \geq \sum_{cyc} ab(a+b) \text{ (ñung theo Schur)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 37. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc = 2\sqrt{ab+bc+ca+4}$. Chöng minh rang

$$\frac{a^7}{1+ab^2}+\frac{b^7}{1+bc^2}+\frac{c^7}{1+ca^2} \geq \frac{128}{3}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\begin{aligned}\frac{a^7}{1+ab^2}+\frac{b^7}{1+bc^2}+\frac{c^7}{1+ca^2} &= \frac{a^7c}{c+ab^2c}+\frac{b^7a}{a+abc^2}+\frac{c^7b}{b+ca^2b} \\ &\geq \frac{(a^{7/2}.c^{1/2}+b^{7/2}.a^{1/2}+c^{7/2}.b^{1/2})^2}{a+b+c+a^2bc+ab^2c+abc^2} \\ &= \frac{(a^{7/2}.c^{1/2}+b^{7/2}.a^{1/2}+c^{7/2}.b^{1/2})^2}{(a+b+c)(1+abc)}\end{aligned}$$

Ap dung bat ñang thöc AM–GM, ta co

$$23a^{7/2}.c^{1/2}+11b^{7/2}.a^{1/2}+9c^{7/2}.b^{1/2} \geq 43a^2bc$$

$$23b^{7/2}.a^{1/2}+11c^{7/2}.b^{1/2}+9a^{7/2}.c^{1/2} \geq 43ab^2c$$

$$23c^{7/2}.b^{1/2}+11a^{7/2}.c^{1/2}+9b^{7/2}.a^{1/2} \geq 43abc^2$$

$$\Rightarrow 43(a^{7/2}.c^{1/2}+b^{7/2}.a^{1/2}+c^{7/2}.b^{1/2}) \geq 43abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow a^{7/2}.c^{1/2}+b^{7/2}.a^{1/2}+c^{7/2}.b^{1/2} \geq abc(a+b+c)$$

Do ño

$$\begin{aligned}\frac{a^7}{1+ab^2}+\frac{b^7}{1+bc^2}+\frac{c^7}{1+ca^2} &\geq \frac{(a^{7/2}.c^{1/2}+b^{7/2}.a^{1/2}+c^{7/2}.b^{1/2})^2}{(a+b+c)(1+abc)} \\ &\geq \frac{(abc(a+b+c))^2}{(a+b+c)(1+abc)} \\ &= \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc}\end{aligned}$$

Ta co

$$abc = 2\sqrt{ab+bc+ca+4} \geq \sqrt{4\sqrt[4]{ab.bc.ca.4}} = 4\sqrt[4]{2abc}$$
$$\Rightarrow abc \geq 8$$

Do ñoù

$$\frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc} \geq \frac{a^2b^2c^2.3\sqrt[3]{abc}}{1+abc}$$
$$\geq \frac{6a^2b^2c^2}{1+abc}$$
$$\geq \frac{6.8^2}{1+8} \quad \text{(do } f(t)=\frac{t^2}{1+t} \text{ ñoàng bieán treân } (0,+\infty))$$
$$= \frac{128}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a^7}{1+ab^2}+\frac{b^7}{1+bc^2}+\frac{c^7}{1+ca^2} = \frac{a^2b^2c^2(a+b+c)}{1+abc} \geq \frac{128}{3} \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c=2$.

## Baøi toaùn 38. (Phaïm Kim Huøng)

Cho $a,b,c>0$ thoûa $abc=1$. Chöùng minh raèng

a) $$\frac{1}{(1+a)^2}+\frac{1}{(1+b)^2}+\frac{1}{(1+c)^2}+\frac{2}{(1+a)(1+b)(1+c)} \geq 1$$

b) $$\frac{a+3}{(1+a)^2}+\frac{b+3}{(1+b)^2}+\frac{c+3}{(1+c)^2} \geq 3$$

*Lôøi giaûi.*

a) Ñaët $x=\frac{2}{1+a}-1, y=\frac{2}{1+b}-1, z=\frac{2}{1+c}-1 \Rightarrow x,y,z \in [-1,1]$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z) = \left(2-\frac{2}{1+a}\right)\left(2-\frac{2}{1+b}\right)\left(2-\frac{2}{1+c}\right)$$
$$= \frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$= \frac{8}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$= (1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Rightarrow x+y+z+xyz=0$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2+(x+1)(y+1)(z+1)\ge 4$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+3(x+y+z)+xyz\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx-2xyz\ge 0$$
$$\Leftrightarrow 2(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)-4xyz\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^2-4xyz\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz\ge 0$$

Ap dung bat ñang thöc AM–GM, ta co

$$x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2\ge 4\sqrt[4]{x^2.y^2.z^2.x^2y^2z^2}=4|xyz|\ge 4xyz$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2+x^2y^2z^2-4xyz\ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

b) Ñat $x=\dfrac{2}{1+a}-1, y=\dfrac{2}{1+b}-1, z=\dfrac{2}{1+c}-1\Rightarrow x,y,z\in[-1,1]$

$$\Rightarrow (1-x)(1-y)(1-z)=\left(2-\frac{2}{1+a}\right)\left(2-\frac{2}{1+b}\right)\left(2-\frac{2}{1+c}\right)$$
$$=\frac{8abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$=\frac{8}{(1+a)(1+b)(1+c)}$$
$$=(1+x)(1+y)(1+z)$$
$$\Rightarrow x+y+z+xyz=0$$

Bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$(x+1)(x+2)+(y+1)(y+2)+(z+1)(z+2)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge -3(x+y+z)$$
$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3xyz$$

Ap dung bat ñang thöc AM–GM, ta co

$$x^2+y^2+z^2\ge 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\ge 3xyz \text{ (do } x,y,z\in[-1,1])$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\ge 3xyz \text{ (ñpcm)}$$

## Bai toan 39. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c \geq 0$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq 2$$

*Lôi giai.*

Ta se chöng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 2 \qquad (1)$$

$$\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq 1 \qquad (2)$$

Khi ño, ta co

$$\left(\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}\right)^2 = \sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\geq 2+2\sum_{cyc}\sqrt{\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}}$$

$$\geq 2+2\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)} \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}} \geq 2$$

Ñay chính la ñieu ta can phai chöng minh, vay nhiem vu cua ta bay giô chæ la chöng minh tính ñung ñan cua cac bat ñang thöc (1) va (2) nöa thoi.

### * Chöng minh (1).

Ta co

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}-2=\frac{\sum_{cyc}ab(a-b)^2(a^2+b^2+2c^2)+8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2} \geq 2$$

$\Rightarrow$ (1) ñung.

* Chöng minh (2).

Ta co

$$\sum_{cyc}\frac{ab(a+c)(b+c)}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)}-1=\frac{2abc((a+b+c)(a^2+b^2+c^2)-abc)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 0$$

$\Rightarrow$ (2) ñung

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c)=(t,t,0)\ (t>0)$.

* Nhan xet.

Ngoai ra, ta con co mot bat ñang thöc manh hôn nhö sau

Cho $a,b,c\geq 0$. Khi ño

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}}+\sqrt{\frac{b(c+a)}{c^2+a^2}}+\sqrt{\frac{c(a+b)}{a^2+b^2}}\geq\sqrt{2+2\sqrt{1+4\sqrt{\frac{abc(a+b)(b+c)(c+a)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}}}}$$

Bai toan 40. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=1$. Chöng minh rang

$$\frac{b\sqrt{c}}{a\left(2\sqrt{c}+\sqrt{3ab}\right)}+\frac{c\sqrt{a}}{b\left(2\sqrt{a}+\sqrt{3bc}\right)}+\frac{a\sqrt{b}}{c\left(2\sqrt{b}+\sqrt{3ca}\right)}\geq 1$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{\sqrt{\frac{bc}{a}}}{a\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{ca}{b}}}+\frac{\sqrt{\frac{ca}{b}}}{b\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{ab}{c}}}+\frac{\sqrt{\frac{ab}{c}}}{c\sqrt{3}+2\sqrt{\frac{bc}{a}}}\geq 1$$

Ñat $x=\sqrt{\frac{bc}{a}},y=\sqrt{\frac{ca}{b}},z=\sqrt{\frac{ab}{c}}$ thì ta co $\begin{cases}x,y,z>0\\ xy+yz+zx=1\end{cases}$ (do $a+b+c=1$)

Bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\frac{x}{2y+yz\sqrt{3}}+\frac{y}{2z+zx\sqrt{3}}+\frac{z}{2x+xy\sqrt{3}}\geq 1$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\frac{x}{2y+yz\sqrt{3}}+\frac{y}{2z+zx\sqrt{3}}+\frac{z}{2x+xy\sqrt{3}}=\frac{x^2}{2xy+xyz\sqrt{3}}+\frac{y^2}{2yz+xyz\sqrt{3}}+\frac{z^2}{2zx+xyz\sqrt{3}}$$

$$\geq \frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+zx)+3xyz\sqrt{3}}$$

$$\geq \frac{3(xy+yz+zx)}{2(xy+yz+zx)+3xyz\sqrt{3}}$$

$$=\frac{3}{2+3xyz\sqrt{3}}$$

$$\geq \frac{3}{2+3\sqrt{3}.\sqrt{\left(\frac{xy+yz+zx}{3}\right)^3}}$$

$$=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2y+yz\sqrt{3}}+\frac{y}{2z+zx\sqrt{3}}+\frac{z}{2x+xy\sqrt{3}}\geq 1$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 41. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $x, y, z$ la ño dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien). Tìm hang so $k$ lôn nhat sao cho

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 6\left(\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)+\frac{k(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2}{xyz(x+y)(y+z)(z+x)}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc ña cho töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}(x-y)^2(z^2+xz+yz-2xy)z(x+y)\geq$$

$$\geq k(x-y)^2(y-z)^2(z-x)^2 \qquad (1)$$

Do $x, y, z$ la ño dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien) nen ton tai cac so khong am $a, b, c$ sao cho $x=b+c, y=c+a, z=a+b$.

Thay vao (1), ta co bat ñang thöc (1) trô thanh

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2+ab)(a+b)(a+b+2c)\ge$$
$$\ge \frac{k}{2}.(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \qquad (2)$$

Cho $c\to 0^+$ , ta ñöôc (2) trô thanh

$$2(b^3(b^2-a^2)(2a+b)+a^3(a^2-b^2)(a+2b)+$$
$$+(a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)^2)\ge \frac{k}{2}.a^2b^2(a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow 2((a-b)^2(a+b)^4+(a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)^2)\ge k.a^2b^2(a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow 2((a+b)^4+(a^2+b^2+ab)(a+b)^2)\ge k.a^2b^2$$

Cho $a=b=1,$ ta suy ra ñöôc: $k\le 56.$

Ta se chöng minh $k_{\max}=56,$ töc la chöng minh

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2+ab)(a+b)(a+b+2c)\ge 28(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Khong mat tính tong quat gia sö $a\ge b\ge c\ge 0$ .

Ta co bat ñang thöc tren töông ñöông vôi

$$((b-c)^2(b^2-a^2)(b+c)(2a+b+c)+(a-c)^2(a^2-b^2)(a+c)(a+2b+c))+$$
$$+(a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)(a+b+2c)+$$
$$+((ac+c^2)(a-c)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c))+$$
$$+(bc+c^2)(b-c)^2(b+c)(2a+b+c)\ge$$
$$\ge 28(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Do $a\ge b\ge c\ge 0$ nen

$$(bc+c^2)(b-c)^2(b+c)(2a+b+c)\ge 0 \qquad (3)$$

$$(ac+c^2)(a-c)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c)\ge$$
$$\ge 2c^2(a-b)^2(a+c)(a+2b+c)-c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c)$$
$$=c^2(a-b)^2(2(a+c)(a+2b+c)-(a+b)(a+b+2c))$$
$$=c^2(a-b)^2(a^2+2ab-b^2+2c(a+2b+c)-2bc)\ge 0$$

$$\Rightarrow (ac+c^2)(a-c)^2(a+c)(a+2b+c) \geq$$
$$\geq c^2(a-b)^2(a+b)(a+b+2c) \qquad (4)$$

Lại do $a \geq b \geq c \geq 0$ nên $a-c \geq \dfrac{a}{b}.(b-c) \geq 0$

$$\Rightarrow (b-c)^2(b^2-a^2)(b+c)(2a+b+c)+(a-c)^2(a^2-b^2)(a+c)(a+2b+c) \geq$$
$$\geq (b-c)^2(b^2-a^2)(b+c)(2a+b+c)+\frac{a^2}{b^2}.(b-c)^2(a^2-b^2)(a+c)(a+2b+c)$$
$$=\frac{(b-c)^2(a^2-b^2)(a^2(a+c)(a+2b+c)-b^2(b+c)(2a+b+c))}{b^2}$$
$$=\frac{(b-c)^2(a^2-b^2)((a^4-b^4)+2ab(a^2-b^2)+2c(a^3-b^3)+2abc(a-b)+c^2(a^2-b^2))}{b^2}$$
$$\geq \frac{(b-c)^2(a^2-b^2)((a^4-b^4)+2ab(a^2-b^2))}{b^2}$$
$$=\frac{(b-c)^2(a-b)^2(a+b)^4}{b^2}$$
$$\geq \frac{(b-c)^2(a-b)^2.16a^2b^2}{b^2} \quad \text{(theo bđt AM-GM)}$$
$$=16(a-b)^2(b-c)^2a^2$$
$$\geq 16(a-b)^2(b-c)^2(a-c)^2 \qquad (5)$$

Ta lại có

$$(a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)(a+b+2c) \geq$$
$$\geq (a-b)^2(a^2+b^2+ab)(a+b)^2$$
$$\geq (a-b)^2(2ab+ab)4ab \quad \text{(theo bđt AM-GM)}$$
$$=12(a-b)^2a^2b^2$$
$$\geq 12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Từ (3),(4),(5) và (6), ta suy ra

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2+ab)(a+b)(a+b+2c) \geq 28(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

Vậy $k_{\max}=56.$

## Bai toan 42. (Poland 2005)

Cho $a,b,c \in [0,1]$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \le 2$$

*Lôi giai.*

Do $a,b,c \in [0,1]$ nen $bc+1 \ge abc+1 > 0 \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \le \frac{a}{abc+1}$

Töông töï, ta co

$$\frac{b}{ca+1} \le \frac{b}{abc+1}$$
$$\frac{c}{ab+1} \le \frac{c}{abc+1}$$
$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ca+1}+\frac{c}{ab+1} \le \frac{a+b+c}{abc+1}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{a+b+c}{abc+1} \le 2$$
$$\Leftrightarrow a+b+c \le 2(1+abc)$$

Do $a,b \in [0,1]$ nen $(1-a)(1-b) \ge 0 \Rightarrow a+b \le 1+ab$

$$\Rightarrow a+b+c \le 1+ab+c$$

Lai do $a,b,c \in [0,1]$ nen $(1-ab)(1-c) \ge 0 \Rightarrow ab+c \le 1+abc$

$$\Rightarrow a+b+c \le 1+ab+c \le 2+abc \le 2(1+abc)$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 43. (China 2006)

Cho $x,y,z > 0$ thoa $x+y+z=1$. Chöng minh rang

$$\frac{xy}{\sqrt{xy+yz}}+\frac{yz}{\sqrt{yz+zx}}+\frac{zx}{\sqrt{zx+xy}} \le \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}}\le\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sqrt{z+x}\ge\frac{1}{\sqrt{2}}.\left(\sqrt{z}+\sqrt{x}\right)>0$$

$$\Rightarrow\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}}\le\sqrt{2}.\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$$

Tööng tö, ta co

$$\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}}\le\sqrt{2}.\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}}\le\sqrt{2}.\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}$$

$$\Rightarrow\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z+x}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x+y}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y+z}}\le\sqrt{2}.\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\right)$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}+\frac{y\sqrt{z}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}+\frac{z\sqrt{x}}{\sqrt{y}+\sqrt{z}}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{x\sqrt{y}}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}-\sqrt{xy}\right)+\sum_{cyc}\sqrt{xy}\le\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\sqrt{xy}\le 1+2\sqrt{xyz}.\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\sqrt{xy}\le\sum_{cyc}x+2\sqrt{xyz}.\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}\qquad(*)$$

Ñat $a=\sqrt{x},b=\sqrt{y},c=\sqrt{z}$ thì ta co $a,b,c>0$. Khi ño, bat ñang thöc (*) trô thanh

$$a^2+b^2+c^2+2abc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge 2(ab+bc+ca)\qquad(**)$$

Do ca hai ve cua bat ñang thöc tren ñong bac nen khong mat tính tong quat, co the gia sö $a+b+c=1$. Ñat $q=ab+bc+ca, r=abc \Rightarrow 0 \le q \le \frac{1}{3}$. Khi ño, ta co

$$a^2+b^2+c^2=1-2q$$
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=\frac{1+q}{q-r}$$

Do ño

$$(**) \Leftrightarrow 1-4q+\frac{2r(1+q)}{q-r} \ge 0$$
$$\Leftrightarrow (1-4q)(q-r)+2r(1+q) \ge 0$$
$$\Leftrightarrow q(1-4q)+r(1+6q) \ge 0$$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $0 \le q \le \frac{1}{4}$. Trong tröông hôp nay, bat ñang thöc tren hien nhien ñung.

* Tröông hôp 2. $\frac{1}{4} \le q \le \frac{1}{3}$.

Ap dung bat ñang thöc Schur, ta co $r \ge \frac{4q-1}{9} \ge 0$.

Do ño

$$q(1-4q)+r(1+6q) \ge q(1-4q)+\frac{(4q-1)(1+6q)}{9}=\frac{(4q-1)(1-3q)}{9} \ge 0$$

Tom lai, ta luon co

$$q(1-4q)+r(1+6q) \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x=y=z=\frac{1}{3}$.

Bai toan 44. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c,d \geq 0$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2$$

*Lôi giai.*

Ta se chöng minh rang $\min P=\frac{4}{9}$.

Trong cac so $a,b,c,d,$ goi $p$ la so lôn nhat, so lôn nhat trong 3 so con lai la $q$, so lôn nhat trong 2 so con lai la $r$ va $s$ la so nho nhat.

Khi ño, ta co $\begin{cases} p\geq q\geq r\geq s \\ \dfrac{1}{p+q+r}\leq\dfrac{1}{p+q+s}\leq\dfrac{1}{p+r+s}\leq\dfrac{1}{q+r+s} \end{cases}$

Do ño, theo bat ñang thöc sap xep lai, ta co

$$\begin{aligned} P&=\left(\frac{a}{a+b+c}\right)^2+\left(\frac{b}{b+c+d}\right)^2+\left(\frac{c}{c+d+a}\right)^2+\left(\frac{d}{d+a+b}\right)^2 \\ &\geq\left(\frac{p}{p+q+r}\right)^2+\left(\frac{q}{p+q+s}\right)^2+\left(\frac{r}{p+r+s}\right)^2+\left(\frac{s}{q+r+s}\right)^2 \end{aligned}$$

Khong mat tính tong quat, co the gia sö $p+q+r+s=1$. Khi ño, ñe chöng minh $P\geq\frac{4}{9}$, ta chæ can chöng minh

$$\frac{p^2}{(1-s)^2}+\frac{q^2}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{(1-q)^2}+\frac{s^2}{(1-p)^2}\geq\frac{4}{9}$$

Ñat $m=p+s, n=ps, t=\dfrac{p^2}{(1-s)^2}+\dfrac{s^2}{(1-p)^2}$ thì ta co $0\leq m\leq 1$ va

$$t=\frac{m^2-2n-2m^3+6mn+m^4-4m^2n+2n^2}{(1-m+n)^2}$$

$$\Rightarrow n^2(2-t)-2n(m-1)(2m-1-t)+(m-1)^2(m^2-t)=0 \qquad (*)$$

+ Neu $t \geq 2$ thì hien nhien ta co

$$\frac{p^2}{(1-s)^2}+\frac{q^2}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{(1-q)^2}+\frac{s^2}{(1-p)^2}\geq\frac{4}{9}$$

+ Neu $\left[\begin{array}{l} m=1, n=0 \\ t=2 \end{array}\right.$ thì ta co $t \geq 1$ vì $\dfrac{p^2}{(1-s)^2}=1$. Do ño

$$\frac{p^2}{(1-s)^2}+\frac{q^2}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{(1-q)^2}+\frac{s^2}{(1-p)^2}\geq\frac{4}{9}$$

+ Neu $t<2, m<1$. Xem (*) la phöông trình bac hai ñoi vôi $n$. Do $n$ luon ton tai nen ta phai co

$$\Delta^{/}=(m-1)^2(2m-1-t)^2-(2-t)(m-1)^2(m^2-t)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow (2m-1-t)^2\geq(2-t)(m^2-t)$$
$$\Rightarrow t\geq\frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2}$$

Töông töï, ñat $l=q+r\Rightarrow l=1-m$. Bang lap luan töông töï nhö tren, ro rang ta chæ can xet tröông hôp $l<1$ va $\dfrac{q^2}{(1-r)^2}+\dfrac{r^2}{(1-q)^2}<2$ la ñu. Khi ño, ta co

$$\frac{q^2}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{(1-q)^2}\geq\frac{-2l^2+4l-1}{(2-l)^2}=\frac{1-2m^2}{(1+m)^2}$$

Do ño

$$\begin{aligned}\frac{p^2}{(1-s)^2}+\frac{q^2}{(1-r)^2}+\frac{r^2}{(1-q)^2}+\frac{s^2}{(1-p)^2}&\geq\frac{-2m^2+4m-1}{(2-m)^2}+\frac{1-2m^2}{(1+m)^2}\\&=\frac{(2m-1)^2(11+10m-10m^2)}{9(2-m)^2(m+1)^2}+\frac{4}{9}\\&\geq\frac{4}{9}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow P\geq\frac{4}{9}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=d$.

Vay $\min P = \frac{4}{9}.$

## Bai toan 45. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$ va $k\in \mathbf{R}$ la mot hang so cho tröôc. Tìm hang so $C_k$ nho nhat sao cho

$$C_k(a^k+b^k+c^k)\ge ab+bc+ca$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

Bo ñe. $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Khi ño, ta co

$$(ab)^k+(bc)^k+(ca)^k\le \max\left\{3,\frac{3^{2k}}{2^{2k}}\right\}\quad \forall k\in R$$

*Chöng minh.*

Ta chöng minh bat ñang thöc ñung cho gia trò tôi han

$$3=\frac{3^{2k}}{2^{2k}}\Leftrightarrow k=\frac{\ln 3}{2\ln 3-2\ln 2}$$

Khi ño

+ $\forall m\ge k$, ta co

$$(ab)^m+(bc)^m+(ca)^m\le ((ab)^k+(bc)^k+(ca)^k)^{\frac{m}{k}}\le \left(\frac{3^{2k}}{2^{2k}}\right)^{\frac{m}{k}}=\frac{3^{2m}}{2^{2m}}$$

$$\Rightarrow (ab)^m+(bc)^m+(ca)^m\le \max\left\{3,\frac{3^{2m}}{2^{2m}}\right\}$$

+ $\forall m<k,$ ta co

$$((ab)^m+(bc)^m+(ca)^m)^{\frac{k}{m}}\le 3^{\frac{k}{m}-1}((ab)^k+(bc)^k+(ca)^k)\le 3^{\frac{k}{m}-1}.3=3^{\frac{k}{m}}$$

$$\Rightarrow (ab)^m+(bc)^m+(ca)^m\le 3$$

$$\Rightarrow (ab)^m+(bc)^m+(ca)^m\le \max\left\{3,\frac{3^{2m}}{2^{2m}}\right\}$$

Khoing mait tính toing quait, coi thei giai söi $a \le b \le c$. Ta chöing minh vei trai ñait max khi $b = c$.

Thait vaiy, ñait $b + c = 2z, c - b = 2t \Rightarrow z \ge t \ge 0 \wedge a \le z - t$. Khi ñoi, ta coi

$$VT = a^k\left((z+t)^k + (z-t)^k\right) + (z^2 - t^2)^k = f(t)$$

Ta coi $f^{/}(t) = ka^k((z+t)^{k-1} - (z-t)^{k-1}) - 2tk(z^2 - t^2)^{k-1}$

Xeit ham soi $g(x) = x^{k-1}$ vôii $x \ge 0$.

Ta coi

$$g^{/}(x) = (k-1)x^{k-2}$$

$$g^{//}(x) = (k-1)(k-2)x^{k-3} \le 0$$

$\Rightarrow$ theo ñònh lyi Larange, ta coi $g(x) - g(y) \le (x-y)g^{/}(y) \quad \forall 0 \le y \le x$

Aip duing cho $y = z - t, x = z + t$, ta ñöôic $(z+t)^{k-1} - (z-t)^k - \le 2t(k-1)(z-t)^{k-2}$

Do ñoi

$$f^{/}(t) \le 2tk(z-t)^{k-2}(a^k(k-1) - (z+t)^{k-1}(z-t))$$
$$\le 2tk(z-t)^{k-1}(a^{k-1}(k-1) - (z+t)^{k-1}) \text{ (do } a \le z - t)$$
$$\le 2tk(z-t)^{k-1}(a^{k-1} - (z+t)^{k-1}) \le 0 \text{ (do } a \le z - t \le z + t)$$

$\Rightarrow f(t)$ lai ham nghòch bieín treín $[0, +\infty)$

$\Rightarrow f(t) \le f(0) = 2b^k(3-2b)^k + b^{2k}$

Baiy giôi ta coin phai chöing minh

$$g(b) = 2b^k(3-2b)^k - 2b^k \le 3 \quad \forall 1 \le b < \frac{3}{2}$$

Ta coi

$$g^{/}(b) = 2kb^{2k-1}\left[\left(\frac{3-2b}{b}\right)^k - 2\left(\frac{3-2b}{b}\right)^{k-1} + 1\right]$$

Ñat $x=\dfrac{3-2b}{b}$ (*) thì $0<x\le 1$ va ro rang öng vôi moi $x\in(0,1]$ thì ta co duy nhat $b\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$ thoa man (*).

Xet ham so $h(x)=x^k-2x^{k-1}+1$ vôi $x\in(0,1]$

Ta co

$$h^{/}(x)=x^{k-2}(kx-2(k-1))$$

$\Rightarrow h^{/}(x)$ co toi ña 1 nghiem

$\Rightarrow h(x)$ co toi ña 2 nghiem (theo ñònh ly Rolle)

Ta lai co $h(1)=0, h\left(\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{8^k-15}{8^k}>0, h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2^k-3}{2^k}<0$

$\Rightarrow h(x)$ co ñung 2 nghiem la $x_0\in\left(\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{2}\right), x=1$

$\Rightarrow g^{/}(b)$ co ñung 2 nghiem la $b_0=\dfrac{3}{x_0+2}, b=1$

Bang bien thien cua $g(b)$

| $b$ | 1 | | $\dfrac{3}{x_0+2}$ | | $\dfrac{3}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(b)$ | 0 | – | 0 | + | |
| $g(b)$ | | ↘ | | ↗ | |

Can cö vao bang bien thien, ta thay

$$g(b)\le \max\left\{g(1), g\left(\dfrac{3}{2}\right)\right\}=3 \quad \forall b\in\left[1,\dfrac{3}{2}\right)$$

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Trô lai bai toan cua ta

* Neu $k \ge 1 \vee k \le 0$ thì ta co $a^k + b^k + c^k \ge 3 \ge ab + bc + ca$ va dau bang ñat tai $a = b = c = 1$ nen hien nhien $C_k = 1$.

* Xet $k \in (0,1)$

Cho $a = b = c = 1$ ta suy ra $C_k \ge 1$.

Cho $a = b \to \frac{3}{2}, c \to 0,$ ta ñöôc $C_k \ge \frac{3^{2-k}}{2^{3-k}}$.

Ngöôc lai, ta se chöng minh $C_k = \max\left\{1, \frac{3^{2-k}}{2^{3-k}}\right\}$ thoa man ñieu kien cua ñe bai, nghía la ta phai chöng minh

$$C_k(a^k + b^k + c^k)(a+b+c)^{2-k} \ge 3^{2-k}(ab+bc+ca) \quad (1)$$

Ap dung bat ñang thöc Holder, ta co

$$(a^k + b^k + c^k)(a+b+c)^{2-k} \ge \left(a^{\frac{2}{3-k}} + b^{\frac{2}{3-k}} + c^{\frac{2}{3-k}}\right)^{3-k}$$

Do ño, (1) la he qua cua

$$C_k\left(a^{\frac{2}{3-k}} + b^{\frac{2}{3-k}} + c^{\frac{2}{3-k}}\right)^{3-k} \ge 3^{2-k}(ab+bc+ca) \quad (2)$$

Ñat $A = a^{\frac{2}{3-k}}, B = b^{\frac{2}{3-k}}, C = c^{\frac{2}{3-k}}$ va $\lambda = \frac{3-k}{2}$ thì (2) töông ñöông vôi

$$C_k\left(\frac{A+B+C}{3}\right)^{2\lambda} \ge \frac{(AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda}{3} \quad (3)$$

Do ca hai ve cua (3) ñong bac nen khong mat tính tong quat, co the gia sö $A+B+C=3$. Khi ño, (3) trô thanh

$$(AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda \le 3C_k$$

$$\Leftrightarrow (AB)^\lambda + (BC)^\lambda + (CA)^\lambda \le \max\left\{3, \left(\frac{3}{2}\right)^{2\lambda}\right\} \quad (4)$$

Ap dung ket qua cua Bo ñe tren, ta suy ra (4) ñung.

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ket luan

+ $k \geq 1 \vee k \leq 0 \Rightarrow C_k = 1$

+ $0 < k < 1 \Rightarrow C_k = \max\left\{1, \dfrac{3^{2-k}}{2^{3-k}}\right\}$.

## Bai toan 46.

Cho $a,b,c \in R$. Tìm tat ca cac so nguyen döông $n$ sao cho

$$a(a+b)^n + b(b+c)^n + c(c+a)^n \geq 0$$

*Lôi giai.*

Nhan xet rang $n$ phai le.

Neu $n \geq 6$ thì cho $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{9}{4}, c = 1$. Khi ño, ta co

$$a(a+b)^n + b(b+c)^n + c(c+a)^n = 13.\left(\frac{5}{4}\right)^{n-2} - 2^{n-2} < 0 \quad \forall n \geq 6$$

Do ño $n \leq 5$ ma $n$ le nen $n = 1 \vee n = 3 \vee n = 5$. Ta se chöng minh ño la tat ca nhöng gia trò can tìm, töc la chöng minh

$$a(a+b) + b(b+c) + c(c+a) \geq 0 \qquad (1)$$

$$a(a+b)^3 + b(b+c)^3 + c(c+a)^3 \geq 0 \qquad (2)$$

$$a(a+b)^5 + b(b+c)^5 + c(c+a)^5 \geq 0 \qquad (3)$$

### * Chöng minh (1).

Ta co

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}.((a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2) \geq 0$$ (ñung)

### * Chöng minh (2).

Ñat $\begin{cases} 2z = a + b \\ 2y = c + a \\ 2x = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = x - y + z \\ c = x + y - z \end{cases}$

Ta co

$$(2) \Leftrightarrow 8(x^4 + y^4 + z^4 + xy^3 + yz^3 + zx^3 - x^3y - y^3z - z^3x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\left( \sum_{cyc} (x^2 - y^2 - xy)^2 + \sum_{cyc} x^2y^2 \right) \geq 0 \text{ (ñung)}$$

## * Chöng minh (3).

Ñat $\begin{cases} 2z = a + b \\ 2y = c + a \\ 2x = b + c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -x + y + z \\ b = x - y + z \\ c = x + y - z \end{cases}$

Ta co

$$(3) \Leftrightarrow 32(x^6 + y^6 + z^6 + xy^5 + yz^6 + zx^5 - x^5y - y^5z - z^5x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 16\sum_{cyc} (x^2 + y^2)(x^2 - y^2 - xy)^2 \geq 0 \text{ (ñung)}$$

Vay tat ca cac gia trò $n$ can tìm la $n = 1, n = 3, n = 5$.

## Bai toan 47.

Cho $a, b, c, d > 0$ thoa $a + b + c + d = 4$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{b^2 + 3} + \frac{b^2}{c^2 + 3} + \frac{c^2}{d^2 + 3} + \frac{d^2}{a^2 + 3} \geq 1$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\frac{a^2}{b^2 + 3} + \frac{b^2}{c^2 + 3} + \frac{c^2}{d^2 + 3} + \frac{d^2}{a^2 + 3} \geq$$

$$= \frac{a^4}{a^2b^2 + 3a^2} + \frac{b^4}{b^2c^2 + 3b^2} + \frac{c^4}{c^2d^2 + 3c^2} + \frac{d^4}{d^2a^2 + 3d^2}$$

$$\geq \frac{(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2}{3(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2d^2 + d^2a^2}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta lai co

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2d^2+d^2a^2=(a^2+c^2)(b^2+d^2)\le\frac{1}{4}.(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\ge 3(a^2+b^2+c^2+d^2)+\frac{1}{4}.(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\ge 4$$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2+d^2\ge\frac{1}{4}.(a+b+c+d)^2$$ (ñung theo bñt Bunhiacopxki)

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 48.

Cho $a_1,a_2,...,a_n$ la $n$ so thöc döông thoa $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_i}=1$. Chöng minh rang

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\ge(n-1)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{a_i}}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x_i=\frac{1}{1+a_i}$ $(i=\overline{1,n})$ thì ta co $x_i>0$ $(i=\overline{1,n}),\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ va $a_i=\frac{1-x_i}{x_i}$ $(i=\overline{1,n})$.

Khi ño, ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{1-x_i}{x_i}}\ge(n-1)\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{x_i}{1-x_i}}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{1-nx_i}{\sqrt{x_i(1-x_i)}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}\frac{x_1+x_2+...+x_n-nx_i}{\sqrt{x_i(1-x_i)}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i\ne j}(x_i-x_j)\left(\frac{1}{\sqrt{x_j(1-x_j)}}-\frac{1}{\sqrt{x_i(1-x_i)}}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i\ne j}\frac{(x_i-x_j)\left(\sqrt{x_i(1-x_i)}-\sqrt{x_j(1-x_j)}\right)}{\sqrt{x_ix_j(1-x_i)(1-x_j)}}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i\neq j}\frac{(x_i-x_j)^2(1-x_i-x_j)}{\left(\sqrt{x_i(1-x_i)}+\sqrt{x_j(1-x_j)}\right)\sqrt{x_ix_j(1-x_i)(1-x_j)}}\geq 0 \text{ (ñung)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 49. (Poland 1990)

Cho $n\geq 3$ va $x_1,x_2,...,x_n>0$. Chöng minh rang

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}\leq n-1$$

trong ño $x_{n+1}=x_1$ va $x_{n+2}=x_2$.

*Lôi giai.*

Ta chöng minh bang quy nap.

+ $n=3$ Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{x^2}{x^2+yz}\leq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{yz}{x^2+yz}\geq 1$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{yz}{x^2+yz}=\sum_{cyc}\frac{y^2z^2}{x^2yz+y^2z^2}$$

$$\geq \frac{(xy+yz+zx)^2}{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+x^2yz+xy^2z+xyz^2}$$

$$=\frac{(xy+yz+zx)^2}{(xy+yz+zx)^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2}$$

Nhöng ta lai co $\dfrac{(xy+yz+zx)^2}{(xy+yz+zx)^2-x^2yz-xy^2z-xyz^2}\geq 1$, do ño $\sum_{cyc}\dfrac{yz}{x^2+yz}\geq 1$

Vay khang ñònh ñung khi $n=3$.

+ Gia sö khang ñònh ñung cho $n$ bien so, ta se chöng minh no cung ñung cho $n+1$ bien so.

Khoing mat tính toing quat, ta coi thei giai söi $x_{n+1}=\max\{x_1,x_2,...,x_{n+1}\}$.

Ta cain phai chöing minh

$$\sum_{i=1}^{n+1}\frac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}\le n \qquad (*)$$

Theo giai thiet quy naip, ta coi $\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i^2+x_{i+1}x_{i+2}}\le n-1$. Do ñoi, ñeichöing minh (*), ta

chæ cain chöing minh

$$\frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2+x_1x_2}+\frac{x_n^2}{x_n^2+x_{n+1}x_1}+\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_{n+1}}-\frac{x_n^2}{x_n^2+x_1x_2}-\frac{x_{n-1}^2}{x_{n-1}^2+x_nx_1}\le 1$$

$$\Leftrightarrow\left(1-\frac{x_{n+1}^2}{x_{n+1}^2+x_1x_2}\right)+x_n^2.\left(\frac{1}{x_n^2+x_1x_2}-\frac{1}{x_n^2+x_{n+1}x_1}\right)+$$

$$+x_{n-1}^2.\left(\frac{1}{x_{n-1}^2+x_nx_1}-\frac{1}{x_{n-1}^2+x_nx_{n+1}}\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\frac{x_1x_2}{x_{n+1}^2+x_1x_2}+\frac{x_n^2x_1(x_{n+1}-x_2)}{(x_n^2+x_1x_2)(x_n^2+x_{n+1}x_1)}+\frac{x_{n-1}^2x_n(x_{n+1}-x_1)}{(x_{n-1}^2+x_nx_1)(x_{n-1}^2+x_nx_{n+1})}\ge 0 \text{ (ñuing)}$$

Vaiy khaing ñònh ñuing cho $n+1$ bien soi. Theo nguyein lyi quy naip, khaing ñònh ñuing cho moii $n\ge 3$.

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 50.

Cho $a,b,c,d$ lai caic soi thöic thoia main $a^2+b^2+c^2+d^2\le 1$. Tìm giai trò lôin nhat cuia bieiu thöic

$$P=(a+b)^4+(a+c)^4+(a+d)^4+(b+c)^4+(b+c)^4+(c+d)^4$$

*Lôi giai.*

Ta coi

$$(a+b)^4\le (a-b)^4+(a+b)^4=2(a^4+b^4+6a^2b^2)$$

Töông töi, ta coi

$$(a+c)^4 \le 2(a^4+c^4+6a^2c^2)$$
$$(a+d)^4 \le 2(a^4+d^4+6a^2d^2)$$
$$(b+c)^4 \le 2(b^4+c^4+6b^2c^2)$$
$$(b+d)^4 \le 2(b^4+d^4+6b^2d^2)$$
$$(c+d)^4 \le 2(c^4+d^4+6c^2d^2)$$

Do ño

$$\begin{aligned} P &\le 6(a^4+b^4+c^4+d^4+2a^2b^2+2a^2c^2+2a^2d^2+2b^2c^2+2b^2d^2+2c^2d^2) \\ &= 6(a^2+b^2+c^2+d^2)^2 \\ &\le 6 \end{aligned}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=d=\pm\frac{1}{2}.$

Vay $\max P = 6.$

## Bai toan 51. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$f(a,b,c)=\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}}\ge\frac{4}{a+b+c}$$

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat, co the gia sö $a\ge b\ge c>0.$

Ta se chöng minh $f(a,b,c)\ge f(t,t,c),$ trong ño $t=\frac{a+b}{2}\ge c.$

That vay, ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}\ge\frac{2}{\sqrt[4]{(4a^2+bc)(4b^2+ca)}}$$

Mat khac, ta co

$$\left(4.\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\frac{(a+b)c}{2}\right)^2-(4a^2+bc)(4b^2+ca)=$$
$$=(a-b)^2\left(a^2+b^2+6ab+\frac{c^2}{4}-3ac-3bc\right)\ge 0 \text{ (do } a\ge b\ge c>0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}} \ge \frac{2}{\sqrt[4]{(4a^2+bc)(4b^2+ca)}} \ge \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}$$

Cung theo bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \ge \frac{1}{\sqrt{4c^2+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}$$

Do ño

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= \frac{1}{\sqrt{4a^2+bc}}+\frac{1}{\sqrt{4b^2+ca}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+ab}} \\ &\ge \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} \\ &= f(t,t,c) \end{aligned}$$

Vay ñe chöng minh $f(a,b,c) \ge \frac{4}{a+b+c}$, ta chæ can chöng minh

$$f(t,t,c) \ge \frac{4}{2t+c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}+\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}} \ge \frac{4}{2t+c}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{4t^2+tc}}-\frac{1}{t}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{4c^2+t^2}}-\frac{1}{t}\right) \ge \left(\frac{4}{2t+c}-\frac{2}{t}\right)$$

$$\Leftrightarrow c.\left(\frac{2}{t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}.\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}.\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}.\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}\right)+$$

$$+\left(\frac{5}{3t(2t+c)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\right)\geq 0$$

Nhö vay, ñe chöng minh $f(t,t,c)\geq\frac{4}{2t+c}$, ta chæ can chöng minh

$$\frac{1}{3t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}.\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}\geq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{5}{3t(2t+c)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\geq 0 \qquad (2)$$

* Chöng minh (1).

Ta co

$$\frac{1}{3t(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t^2+tc}.\left(2t+\sqrt{4t^2+tc}\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(2t+c)}-\frac{1}{\sqrt{4t+c}.\left(2\sqrt{t}+\sqrt{4t+c}\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4t+c}.\left(2\sqrt{t}+\sqrt{4t+c}\right)\geq 3(2t+c)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4t^2+tc}+4t+c\geq 6t+3c$$

$\Leftrightarrow \sqrt{4t^2+tc}\geq t+c$ (ñung do $t\geq c$)

$\Rightarrow$ (1) ñung.

* Chöng minh (2).

Ta co

$$\frac{5}{3t(2t+c)}-\frac{4c}{t\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3(2t+c)}-\frac{4c}{\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 5\sqrt{4c^2+t^2}.\left(t+\sqrt{4c^2+t^2}\right)\geq 12c(2t+c)$$

$$\Leftrightarrow 5t\sqrt{4c^2+t^2}+5(4c^2+t^2)\ge 12c(2t+c)$$

$$\Leftrightarrow 5t\sqrt{4c^2+t^2}+8c^2+5t^2\ge 24tc$$

$$\Leftrightarrow 25t^2(4c^2+t^2)\ge (8c^2+5t^2-24tc)^2$$

$\Leftrightarrow 4c(60t^3-139t^2c+96tc^2-16c^3)\ge 0$ (ñung do $t\ge c$)

$\Rightarrow$ (2) ñung.

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b, c=0$ va cac hoan vò töông öng.

## Bai toan 52. (Vasile Cirtoaje)

Cho $x,y,z>0$. Chöng minh rang

$$\sqrt{(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)}\ge 1+\sqrt{1+\sqrt{(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}\right)}}$$

*Lôi giai.*

Ñat $a^2=x+y+z, b^2=xy+yz+zx, c^2=xyz\ (a,b,c>0)$ thì ta co $ab\ge 3c>0$.

Khi ño, ta co

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{b^2}{c^2}$$

$$x^2+y^2+z^2=a^4-2b^2$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{b^4-2a^2c^2}{c^4}$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{ab}{c}\ge 1+\sqrt{1+\sqrt{\frac{(a^4-2b^2)(b^4-2a^2c^2)}{c^4}}}$$

$$\Leftrightarrow ab-c\ge\sqrt{c^2+\sqrt{(a^4-2b^2)(b^4-2a^2c^2)}}$$

$$\Leftrightarrow (ab-c)^2\ge c^2+\sqrt{(a^4-2b^2)(b^4-2a^2c^2)}$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2-2abc\ge\sqrt{(a^4-2b^2)(b^4-2a^2c^2)}$$

$$\Leftrightarrow (a^2b^2-2abc)^2\ge (a^4-2b^2)(b^4-2a^2c^2)$$

$\Leftrightarrow 2(b^3 - a^3c)^2 \geq 0$ (ñuùng)

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $x = y = z.$

## Baøi toaùn 53. (Mildorf)

cho $a,b,c > 0, k \in \mathbf{R}$. Chöùng minh raèng

$$\sum_{cyc}\max(a^k,b^k).(a-b)^2 \geq 2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc}\min(a^k,b^k).(a-b)^2$$

*Lôøi giaûi.*

Khoâng maát tính toång quaùt, coù theå giaû söû $a \geq b \geq c > 0.$

Coù 2 tröôøng hôïp xaûy ra

* Tröôøng hôïp 1. $k \geq 0 \Rightarrow a^k \geq b^k \geq c^k > 0.$

Tröôùc heát, ta chöùng minh

$$\sum_{cyc}\max(a^k,b^k).(a-b)^2 \geq 2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c)$$

$$\Leftrightarrow a^k(a-b)^2 + a^k(a-c)^2 + b^k(b-c)^2 \geq 2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c)$$

Chuù yù raèng $(a-b)^2 + (a-c)^2 = (b-c)^2 + 2(a-b)(a-c)$, neân baát ñaúng thöùc treân töông ñöông vôùi

$$a^k(b-c)^2 + b^k(b-c)^2 + 2a^k(a-b)(a-c) \geq 2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c)$$

$$\Leftrightarrow a^k(b-c)^2 + b^k(b-c)^2 \geq 2b^k(b-a)(b-c) + 2c^k(c-a)(c-b)$$

$$\Leftrightarrow a^k(b-c) + b^k(b-c) + 2b^k(a-b) - 2c^k(a-c) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^k + b^k - 2c^k)(b-c) + 2(b^k - c^k)(a-b) \geq 0 \quad \text{(ñuùng)}$$

Tieáp theo, ta seõ chöùng minh

$$2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c) \geq \sum_{cyc}\min(a^k,b^k).(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^k(a-b)(a-c) \geq b^k(a-b)^2 + c^k(a-c)^2 + c^k(b-c)^2$$

Chu y rang $(a-c)^2+(b-c)^2=(a-b)^2+2(c-a)(c-b)$, nen bat ñang thöc tren töông vôi

$$2\sum_{cyc} a^k(a-b)(a-c) \ge b^k(a-b)^2+c^k(a-b)^2+2c^k(c-a)(c-b)$$

$$\Leftrightarrow 2a^k(a-b)(a-c)+2b^k(b-a)(b-c) \ge b^k(a-b)^2+c^k(a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^k(a-c)-2b^k(a-b)(b-c) \ge b^k(a-b)+c^k(a-b)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^k-b^k)(a-b)+(2a^k-b^k-c^k)(b-c) \ge 0 \text{ (ñung)}$$

Vay trong tröông hôp nay, ta co

$$\sum_{cyc}\max(a^k,b^k).(a-b)^2 \ge 2\sum_{cyc} a^k(a-b)(a-c) \ge \sum_{cyc}\min(a^k,b^k).(a-b)^2$$

* Tröông hôp 2. $k<0 \Rightarrow a^k \le b^k \le c^k$.

Lap luan töông tö tröông hôp 1, ta cung co

$$\sum_{cyc}\max(a^k,b^k).(a-b)^2 \ge 2\sum_{cyc} a^k(a-b)(a-c) \ge \sum_{cyc}\min(a^k,b^k).(a-b)^2$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$\sum_{cyc}\max(a^k,b^k).(a-b)^2 \ge 2\sum_{cyc} a^k(a-b)(a-c) \ge \sum_{cyc}\min(a^k,b^k).(a-b)^2$$

$\Rightarrow$ ñpcm

## Bai toan 54. (Vasile Cirtoaje)

Cho $\Delta ABC$. Chöng minh rang

$$\frac{1}{2-\cos A}+\frac{1}{2-\cos B}+\frac{1}{2-\cos C} \ge 2$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}(2-\cos A)(2-\cos B) \ge 2(2-\cos A)(2-\cos B)(2-\cos C)$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\cos A-2\sum_{cyc}\cos A.\cos B+3\cos A.\cos B.\cos C-4 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos C+8\sin\frac{C}{2}.t-6\sin\frac{C}{2}.\cos C.t-3t^2+3\cos^2\frac{C}{2}+$$

$$+2\cos C.t^2-2\cos^2\frac{C}{2}.\cos C-4\geq 0 \quad (*)$$

trong ñoi $t=\cos\frac{A-B}{2}\Rightarrow 1\geq t\geq \sin\frac{C}{2}$ $\left(\text{do } 0\leq\frac{A-B}{2}\leq\frac{A+B}{2}<\frac{\pi}{2}\right)$

Ñat $VT(*)=f(t)$

Ta coi

$$f^{//}(t)=2(2\cos C-3)<0$$

$\Rightarrow f(t)$ la ham loi tren $\left[\sin\frac{C}{2},1\right]$.

$$\Rightarrow f(t)\geq \min\left\{f\left(\sin\frac{C}{2}\right),f(1)\right\}$$

Ta coi

$$f\left(\sin\frac{C}{2}\right)=4\cos C+8\sin^2\frac{C}{2}-6\sin^2\frac{C}{2}.\cos C-3\sin^2\frac{C}{2}+$$

$$+3\cos^2\frac{C}{2}+2\cos C.\sin^2\frac{C}{2}-2\cos^2\frac{C}{2}.\cos C-4$$

$$=4\cos C+5\sin^2\frac{C}{2}+3\cos^2\frac{C}{2}-4\sin^2\frac{C}{2}.\cos C-2\cos^2\frac{C}{2}.\cos C-4$$

$$=4\cos C+2\sin^2\frac{C}{2}+3-2\sin^2\frac{C}{2}.\cos C-2\cos C-4$$

$$=2\cos C+2\sin^2\frac{C}{2}.(1-\cos C)-1$$

$$=2\cos C+(1-\cos C)^2-1$$

$$=\cos^2 C$$

$$\geq 0$$

Ta lai coi

$$f(1)=4\cos C+8\sin\frac{C}{2}-6\sin\frac{C}{2}.\cos C-3+3\cos^2\frac{C}{2}+$$

$$+2\cos C-2\cos^2\frac{C}{2}.\cos C-4$$

$$=6\cos C+8\sin\frac{C}{2}-3\sin^2\frac{C}{2}-6\sin\frac{C}{2}.\cos C-2\cos^2\frac{C}{2}.\cos C-4$$

$$=\sin\frac{C}{2}.\left(2\sin\frac{C}{2}-1\right)^2\left(2-\sin\frac{C}{2}\right)\ge 0$$

Vaiy ta coi $f\left(\sin\frac{C}{2}\right)\ge 0$ vai $f(1)\ge 0 \Rightarrow \min\left\{f\left(\sin\frac{C}{2}\right), f(1)\right\}\ge 0$

$$\Rightarrow f(t)\ge \min\left\{f\left(\sin\frac{C}{2}\right), f(1)\right\}\ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ hoaic $A=B\to\frac{\pi}{2}, C\to 0$ vai caic hoain vò töông öing.

## Bai toain 55.

Cho $a,b,c>0$. Chöing minh raing

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

*Lôii giaii.*

Ta coi

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\ge 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^2}{b}+\sum_{cyc}\frac{ab}{c}+a+b+c\ge 3\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b}+b-2a\right)+\left(\sum_{cyc}\frac{ab}{c}-a-b-c\right)\ge 3\left(\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}-a-b-c\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{ab}\ge\frac{3\sum_{cyc}(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}$$

Aip duing bait ñaing thöic Bunhiacopxki, ta coi

$$\frac{3\sum_{cyc}(a-b)^2}{\sqrt{3(a^2+b^2+c^2)}+a+b+c}\le\frac{3}{2}.\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}+\frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{ab}\geq\frac{3}{2}.\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2}{b}+\sum_{cyc}\frac{c(a-b)^2}{ab}\geq 3\frac{\sum_{cyc}(a-b)^2}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b+c}\right)+\sum_{cyc}(a-b)^2\left(\frac{c}{ab}-\frac{1}{a+b+c}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+c)}{b(a+b+c)}+\frac{1}{abc(a+b+c)}.\sum_{cyc}(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)\geq 0$$

De thay $2\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+c)}{b(a+b+c)}\geq 0$. Do ño, ta chæ can chöng minh

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)\geq 0$$

Khong mat tính tong quat, gia sö $a\geq b\geq c>0\Rightarrow a-c\geq a-b\geq 0.$

Khi ño, ta co

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)=$$

$$=(b-c)^2(a^2+ab+ac-bc)+(a-c)^2(b^2+ab+bc-ac)+$$
$$+(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)$$

$$\geq(a-c)^2(b^2+ab+bc-ac)+(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)$$

$$\geq(a-b)^2(b^2+ab+bc-ac)+(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)$$
$$=(a-b)^2(b+c)^2$$
$$\geq 0$$

Vay $\sum_{cyc}(a-b)^2(c^2+ac+bc-ab)\geq 0$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

## Bai toan 56. (Le Trung Kien)

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\frac{a(b+c)}{a^2+2bc}+\frac{b(c+a)}{b^2+2ca}+\frac{c(a+b)}{c^2+2ab}\le 2+\frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{3a(b+c)}{a^2+2bc}\le 6+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(2-\frac{3a(b+c)}{a^2+2bc}\right)+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{2a^2-3a(b+c)+4bc}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)-(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{(a-2b)(c-a)}{a^2+2bc}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-2c)(a-b)}{a^2+2bc}-\sum_{cyc}\frac{(b-2c)(a-b)}{b^2+2ca}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)}+\frac{6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-ab)(c^2+2ab)+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}ab(a-b)^2(c^2+2ab)+\sum_{cyc}(a-b)^2(-4c^2+4c(a+b)-4ab)(c^2+2ab)+$$
$$+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}ab(a-b)^2(c^2+2ab)+4(a-b)(b-c)(c-a).\sum_{cyc}(a-b)(c^2+2ab)+$$
$$+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sum_{cyc}ab(a-b)^2(c^2+2ab)-12(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2+$$
$$+6(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0$$

Khoing mat tính toing quat, giai söi $a \ge b \ge c > 0$. Khi ñoi, ta coi

$$\begin{aligned}\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) &\ge ab(a-b)^2(c^2+2ab)\\ &\ge 2a^2b^2(a-b)^2\\ &\ge 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\end{aligned}$$

Vaiy

$$\sum_{cyc} ab(a-b)^2(c^2+2ab) - 2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0$$

$$\Rightarrow \frac{a(b+c)}{a^2+2bc} + \frac{b(c+a)}{b^2+2ca} + \frac{c(a+b)}{c^2+2ab} \le 2 + \frac{2(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2}{(a^2+2bc)(b^2+2ca)(c^2+2ab)} \quad \text{(ñpcm)}$$

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $a=b=c$ hoaic $a=b, c=0$ vai cac hoain vò.

## Bai toain 57.

Cho $a,b,c>0$. Chöing minh raing

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \ge (1+a)(1+b)(1+c) - 2(1+abc)$$

*Lôi giai.*

### * Caich 1.

Ta coi bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \ge -1+a+b+c+ab+bc+ca-abc$$

$$\Leftrightarrow 2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2$$

Chui yi raing $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) = (-1+ab+bc+ca)^2 + (a+b+c-abc)^2$

Do ñoi, bait ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$2(-1+ab+bc+ca)^2 + 2(a+b+c-abc)^2 \ge (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2$$

$$\Leftrightarrow (-1+ab+bc+ca-a-b-c+abc)^2 \ge 0 \quad \text{(ñuing)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

### * Caich 2.

Ta coi bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$\sqrt{2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)} \ge -1+a+b+c+ab+bc+ca-abc$$

$$\Leftrightarrow 2(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2) \ge (-1+a+b+c+ab+bc+ca-abc)^2$$

Ñat $a=\text{tg}A, b=\text{tg}B, c=\text{tg}C$ $\left(0<A,B,C<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{2}{\cos^2 A.\cos^2 B.\cos^2 C} \ge \left(-1+\sum_{cyc}\frac{\sin A}{\cos A}+\sum_{cyc}\frac{\sin A.\sin B}{\cos A.\cos B}-\frac{\sin A.\sin B.\sin C}{\cos A.\cos B.\cos C}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \ge \left(\sum_{cyc}\sin A.\cos B.\cos C-\sin A.\sin B.\sin C+\right.$$

$$\left.+\sum_{cyc}\sin A.\sin B.\cos C-\cos A.\cos B.\cos C\right)^2$$

Chu y rang

$$\sin(A+B+C)=\sum_{cyc}\sin A.\cos B.\cos C-\sin A.\sin B.\sin C$$

$$\cos(A+B+C)=\cos A.\cos B.\cos C-\sum_{cyc}\sin A.\sin B.\cos C$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$2 \ge (\sin(A+B+C)-\cos(A+B+C))^2$ (hien nhien ñung)

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 58. (France 2004)

Cho $a,b,c,d,e,f \in R$ thoa $a+b+c+d+e+f=0$. Chöng minh rang

$$ab+bc+cd+de+ef+fa \le \frac{1}{2}.(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)$$

*Lôi giai.*

### * Cach 1.

Ta co $(a+c+e)(b+d+f)=-(a+c+e)^2 \le 0$

Mat khac, ta co

$$(a+c+e)(b+d+f)=(ab+bc+cd+de+ef+fa)+(ad+be+fc)$$

Do ño

$$\begin{aligned}ab+bc+cd+de+ef+fa &\le -ad-be-fc\\ &\le \frac{a^2+d^2}{2}+\frac{b^2+e^2}{2}+\frac{c^2+f^2}{2}\\ &=\frac{1}{2}.(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

* Cach 2.

Ñat

$$A=a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2$$
$$B=ab+bc+cd+de+ef+fa$$
$$C=ac+bd+ce+df+ea+fb$$
$$D=ad+be+cf$$

Khi ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta can chöng minh $A\ge 2B$

Theo gia thiet, ta co

$$(a+b+c+d+e+f)^2=A+2B+2C+2D=0$$

Ta lai co

$$(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2=A+2D$$
$$(a+c+e)^2+(b+d+f)^2=A+2C$$

Vì tong cac bình phöông luon khong am nen ta co

$$(a+d)^2+(b+e)^2+(c+f)^2+(a+c+e)^2+(b+d+f)^2=2A+2C+2D\ge 0$$

Theo tren, ta co $A+2B+2C+2D=0$

Do ño

$$2A+2C+2D\ge A+2B+2C+2D$$
$$\Rightarrow A\ge 2B$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Bai toan 59. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $x, y > 0$. Chöng minh rang

$$4y^2\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}+8x^2y\sqrt{x^2+3y^2}+$$
$$+4x(x^2+y^2)\sqrt{y^2+3x^2}\le 3(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

Bo ñe. $\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ thì

$$\sin x+\frac{1}{2}.\sin 2x\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

*Chöng minh.*

Xet ham so $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}.\sin 2x$ vôi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta co $f^{/}(x)=\cos x+\cos 2x=2\cos^2 x+\cos x-1=(1+\cos x)(2\cos x-1)$

$$f^{/}(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

Qua $\frac{\pi}{3}$ thì $f^{/}(x)$ ñoi dau tö döông sang am, nen

$$f(x)\le f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}\quad\forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Trô lai bai toan cua ta

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{y^2\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}+\frac{2x^2y\sqrt{3}}{(y^2+3x^2)\sqrt{x^2+3y^2}}+\frac{x(x^2+y^2)\sqrt{3}}{(x^2+3y^2)\sqrt{y^2+3x^2}}\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Chu y rang

$$\frac{y^2\sqrt{3}}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}=\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+3y^2}}.\frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}}$$
$$\frac{2x^2y\sqrt{3}}{(y^2+3x^2)\sqrt{x^2+3y^2}}=\sqrt{1-\frac{y^2}{y^2+3x^2}}.\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}$$
$$\frac{x(x^2+y^2)\sqrt{3}}{(x^2+3y^2)\sqrt{y^2+3x^2}}=\sqrt{1-\frac{4x^2y^2}{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}.\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}$$

Mat khac $0<\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}},\frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}},\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}<1.$

Do ño, ta co the ñat

$$\cos A=\frac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}},\cos B=\frac{y}{\sqrt{y^2+3x^2}},\cos C=\frac{2xy}{\sqrt{(x^2+3y^2)(y^2+3x^2)}}$$

trong ño $0<A,B,C<\frac{\pi}{2}.$

Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sin A.\cos B+\sin B.\cos C+\sin C.\cos A\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Mat khac, tö cach ñat, ta co

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A.\cos B.\cos C=1$$
$$\Rightarrow A+B+C=\pi.$$

Do $\frac{\pi}{2}>A,B,C>0$ nen $(\sin A,\sin B,\sin C)$ va $(\cos A,\cos B,\cos C)$ la 2 day ñôn ñieu ngöôc chieu.

$\Rightarrow$ Theo bat ñang thöc sap xep lai, ta co

$$\sin A.\cos B+\sin B.\cos C+\sin C.\cos A\le\sin A.\cos C+\sin B.\cos B+\sin C.\cos A$$
$$=\sin B+\frac{1}{2}.\sin 2B$$
$$\le\frac{3\sqrt{3}}{4}\quad\text{(theo Bo ñe tren)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = y.$

## Baøi toaùn 60. (Phaïm Kim Huøng)

Cho $a,b,c > 0$. Tìm haèng soá $k$ nhoû nhaát sao cho baát ñaúng thöùc sau ñuùng

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^k + \left(\frac{b}{c+a}\right)^k + \left(\frac{c}{a+b}\right)^k \geq \frac{3}{2^k}$$

*Lôøi giaûi.*

Cho $b = c = 1, a \to 0^+$, ta suy ra $k \geq \dfrac{\ln 3}{\ln 2} - 1 = n.$

Ta seõ chöùng minh $k_{\min} = n,$ töùc laø chöùng minh

$$\left(\frac{a}{b+c}\right)^n + \left(\frac{b}{c+a}\right)^n + \left(\frac{c}{a+b}\right)^n \geq \frac{3}{2^n}$$

Khoâng maát tính toång quaùt, coù theå giaû söû $\begin{cases} 0 < a \leq b \leq c \\ a+b+c = 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < a \leq \dfrac{1}{3}.$

Ñaët $\begin{cases} c+b = 2t \\ c-b = 2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = t-m \\ c = t+m \\ t > m \geq 0 \end{cases}$

Xeùt haøm soá $f(m) = \dfrac{(t+m)^n}{(t-m+a)^n} + \dfrac{(t-m)^n}{(t+m+a)^n}$ vôùi $m \geq 0.$

Ta coù $f^{/}(m) = n(2t+a)\left(\dfrac{(t+m)^{n-1}}{(t-m+a)^{n+1}} - \dfrac{(t-m)^{n-1}}{(t+m+a)^{n+1}}\right)$

Ta seõ chöùng minh $f^{/}(m) \geq 0 \quad \forall m \geq 0.$

Thaät vaäy

$$\begin{aligned} & f^{/}(m) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow (1-n)(\ln(t+m) - \ln(t-m)) \leq (n+1)(\ln(t+m+a) - \ln(t-m+a)) \end{aligned}$$

Do $\dfrac{1+n}{1-n} > 2$ neân ta chæ caàn chöùng minh

$$\ln(t+m)-\ln(t-m)\le 2(\ln(t+m+a)-\ln(t-m+a))$$

Xet ham so $g(m)=\ln(t+m)-\ln(t-m)-2\ln(t+m+a)+2\ln(t-m+a)$

Ta co $g^{/}(m)=\dfrac{1}{m+t}-\dfrac{1}{t-m}-\dfrac{2}{a+t+m}-\dfrac{2}{a+t-m}\le 0$ (do $a\le b\le c$)

$\Rightarrow g(m)$ la ham nghich bien tren $[0,+\infty)$.

$\Rightarrow g(m)\le g(0)=0\ \ \forall m\ge 0$

$\Rightarrow \ln(t+m)-\ln(t-m)\le 2(\ln(t+m+a)-\ln(t-m+a))$

$\Rightarrow f^{/}(m)\ge 0$

$\Rightarrow f(m)$ la ham ñong bien tren $[0,+\infty)$.

$$\Rightarrow f(m)\ge f(0)\ =2\left(\frac{t}{t+a}\right)^n=2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n\ \ \forall m\ge 0$$

Do ño

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c}{a+b}\right)^n&=\frac{(t+m)^n}{(t-m+a)^n}+\frac{(t-m)^n}{(t+m+a)^n}+\left(\frac{a}{1-a}\right)^n\\&\ge 2\left(\frac{1-a}{1+a}\right)^n+\left(\frac{a}{1-a}\right)^n\\&=h(a)\end{aligned}$$

Ta co $h^{/}(a)=n\left(\dfrac{a^{n-1}}{(1-a)^{n+1}}-\dfrac{4(1-a)^{n-1}}{(1+a)^{n+1}}\right)$

$h^{/}(a)=0$

$\Leftrightarrow \ln 4=(n+1)\ln(1+a)-2n\ln(1-a)+(n-1)\ln a$

Ñat $\varphi(a)=(n+1)\ln(1+a)-2\ln(1-a)+(n-1)\ln a$

Ta co $\varphi^{/}(a)=\dfrac{n+1}{1+a}+\dfrac{2n}{1-a}-\dfrac{1-n}{a}=\dfrac{(3n+1)a+n-1}{a(1-a^2)}$

$\Rightarrow \varphi^{/}(a)$ co 1 nghiem döông duy nhat la $a_0=\dfrac{1-n}{3n+1}<\dfrac{1}{3}$ $\left(\text{do } n=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}-1>\dfrac{1}{3}\right)$

Qua $a_0$ thì $\varphi^{/}(a)$ ñoi dau tö am sang döông va $\lim\limits_{a\to 0}\varphi(a)=+\infty, \varphi\left(\frac{1}{3}\right)=\ln 4$ nen

phöông trình $\varphi(a)=\ln 4$ co 2 nghiem döông phan biet la $\frac{1}{3}$ va $0<a_1<\frac{1}{3}$.

$\Rightarrow$ phöông trình $h^{/}(a)=0$ co 2 nghiem döông phan biet la $\frac{1}{3}$ va $a_1$.

Qua $a_1$ thì $h^{/}(a)$ ñoi dau tö döông sang am, qua $\frac{1}{3}$ thì $h^{/}(a)$ ñoi dau tö am sang döông nen ta co

$$h(a)\ge \min\left\{h(0), h\left(\frac{1}{3}\right)\right\}=\frac{3}{2^n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b+c}\right)^n+\left(\frac{b}{c+a}\right)^n+\left(\frac{c}{a+b}\right)^n\ge \frac{3}{2^n}$$

Vay $k_{\min}=n.$

## Bai toan 61. (Tran Nam Dung)

Cho $x>0$. Tìm hang so $s$ döông nho nhat sao cho

$$2\left(x^s+\frac{1}{x^s}+1\right)\ge 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

*Lôi giai.*

Ro rang vôi $x=1$ thì bat ñang thöc ña cho trô thanh ñang thöc. Do ño, khong mat tính tong quat, ta chæ can xet $x>1$ la ñu. Khi ño, ta co

$$2\left(x^s+\frac{1}{x^s}+1\right)\ge 3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2(x^s-1)^2}{x^s}\ge \frac{3(x-1)^2}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^s-1}{x-1}\ge \sqrt{\frac{3}{2}}.x^{\frac{s-1}{2}}$$

Theo ñònh ly Lagrange, ton tai $y\in(1,x)$ sao cho

$$\frac{x^s-1}{x-1}=(y^s)'=sy^{s-1}$$

Do ño

$$\frac{x^s-1}{x-1}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}.x^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow sy^{s-1}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}.x^{\frac{s-1}{2}}$$

Cho $x\to1^+$ thì $y\to1^+$, ta suy ra ñöôc $s\ge\sqrt{\frac{3}{2}}$. Ta se chöng minh ñay la gia trò can tìm. Ñe co ñieu nay, ta ch can chöng minh $\frac{x^s-1}{x-1}\ge s.x^{\frac{s-1}{2}}\ \forall x,s>1$ la ñu.

Ta co

$$\frac{x^s-1}{x-1}\ge s.x^{\frac{s-1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=x^s-1-sx^{\frac{s+1}{2}}+sx^{\frac{s-1}{2}}\ge0$$

Ta co $f'(x)=sx^{\frac{s-3}{2}}.\left(\left(x^{\frac{s+1}{2}}-1\right)-\frac{(s+1)(x-1)}{2}\right)$

Theo ñònh ly Lagrange, ton tai $z\in(1,x)$ sao cho

$$x^{\frac{s+1}{2}}-1=\left(z^{\frac{s+1}{2}}\right)'.(x-1)=z^{\frac{s-1}{2}}.\frac{(s+1)(x-1)}{2}>\frac{(s+1)(x-1)}{2}\quad\text{(do } s,z>1)$$

$$\Rightarrow f'(x)>0\ \forall x>1$$

$\Rightarrow f(x)$ la ham ñong bien tren $(1,+\infty)$.

$$\Rightarrow f(x)\ge\lim_{x\to1}f(x)=0\ \forall x>1$$

Vay $s_{\min}=\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Bai toan 62. (Bulgaria 2003)

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=3$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geq\frac{3}{2}$$

*Lôi giai.*

* Cach 1.

Bang cach quy ñong mau so va thu gon, ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$2(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+a+b+c)\geq$$
$$\geq 3(a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow 2(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+3)\geq$$
$$\geq 3(a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2)$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{3}{2}.(a^2b^3+a^2b)\geq 3a^2b^2$$
$$\frac{3}{2}.(b^2c^3+b^2c)\geq 3b^2c^2$$
$$\frac{3}{2}.(c^2a^3+c^2a)\geq 3c^2a^2$$
$$\Rightarrow \frac{3}{2}.\left(\sum_{cyc}a^2b^3+\sum_{cyc}a^2b\right)\geq 3\left(\sum_{cyc}a^2b^2\right) \qquad (1)$$

Lai ap dung bat dang thöc AM-GM, ta co

$$2a^3+1\geq 3a$$
$$2b^3+1\geq 3b$$
$$2c^3+1\geq 3c$$
$$\Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3)+3\geq 3(a+b+c)=9$$
$$\Rightarrow 2(a^3+b^3+c^3)\geq 6 \qquad (2)$$

Tiep tuc ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{1}{2}.(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b+b^2c+c^2a)\geq 3a^{4/3}b^{4/3}c^{4/3}$$

$$=\frac{3a^2b^2c^2}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}$$

$$\geq \frac{3a^2b^2c^2}{\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2}$$

$$=3a^2b^2c^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}.(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^2b+b^2c+c^2a)\geq 3a^2b^2c^2 \qquad (3)$$

Cong cac bat ñang thöc (1),(2) va (3) ve theo ve, ta ñöôc

$$2(a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3+a^3+b^3+c^3+a^2b+b^2c+c^2a+3)\geq$$
$$\geq 3(a^2b^2c^2+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+a^2+b^2+c^2)$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

* Cach 2.

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\left(\frac{a}{b^2+1}-a\right)+\left(\frac{b}{c^2+1}-b\right)+\left(\frac{c}{a^2+1}-c\right)\geq \frac{3}{2}+a+b+c$$
$$\Leftrightarrow \frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1}\leq \frac{3}{2}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{ab^2}{b^2+1}\leq \frac{ab^2}{2b}=\frac{1}{2}.ab$$

Töông tö, ta co

$$\frac{bc^2}{c^2+1}\leq \frac{1}{2}.ab$$
$$\frac{ca^2}{a^2+1}\leq \frac{1}{2}.ab$$

Do ño

$$\frac{ab^2}{b^2+1}+\frac{bc^2}{c^2+1}+\frac{ca^2}{a^2+1}\le\frac{1}{2}.(ab+bc+ca)\le\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

Bai toan 63.

Cho $n\ge 4, n\in N$ va $a_1,a_2,...,a_n\ge 0$ thoa man $a_1+a_2+...+a_n=2$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{a_1}{a_2^2+1}+\frac{a_2}{a_3^2+1}+...+\frac{a_n}{a_1^2+1}$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

Bo ñe. $n\ge 4, n\in N$va $a_1,a_2,...,a_n\ge 0$. Khi ño, ta co

$$4(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)\le(a_1+a_2+...+a_n)^2$$

*Chöng minh.*

Ñat $f_n(a_1,a_2,...,a_n)=4(a_1a_2+a_2a_3+...+a_na_1)-(a_1+a_2+...+a_n)^2$. Ñe chöng minh Bo ñe tren, ta se chöng minh bang quy nap theo $n$ rang

$$f_n(a_1,a_2,...,a_n)\le 0$$

+ $n=4$, ta co

$$\begin{aligned}f_4(a_1,a_2,a_3,a_4)&=4(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_4+a_4a_1)-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2\\&=4(a_1+a_3)(a_2+a_4)-(a_1+a_2+a_3+a_4)^2\\&=-(a_1-a_2+a_3-a_4)^2\\&\le 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow f_4(a_1,a_2,a_3,a_4)\le 4$

Vay khang ñònh ñung khi $n=4$.

Gia söû khang ñònh ñung cho $n-1$ bien so $(n\ge 5)$, ta se chöng minh khang ñònh ñung cho $n$ bien so.

Khong mat tính tong, quat co the gia sö $a_1 = \max\{a_1, a_2, ..., a_n\}$. Khi ño, ta co

$$
\begin{aligned}
& f_n(a_1, a_2, ..., a_n) - f_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1} + a_n) = \\
& = 4(a_{n-2}a_{n-1} + a_{n-1}a_n + a_na_1 - a_{n-2}(a_{n-1} + a_n) - (a_{n-1} + a_n)a_1) \\
& = 4(a_{n-1}a_n - a_{n-2}a_n - a_{n-1}a_1) \\
& \le 0 \\
& \Rightarrow f_n(a_1, a_2, ..., a_n) \le f_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + a_n)
\end{aligned}
$$

Theo gia thiet quy nap, ta co

$$f_{n-1}(a_1, a_2, ..., a_{n-2}, a_{n-1} + a_n) \le 0$$

Do ño

$$f_n(a_1, a_2, ..., a_n) \le 0$$

Vay khang ñònh ñung cho $n$ bien so. Theo nguyen ly quy nap, khang ñònh ñung vôi moi $n \ge 4$.

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Trô lai bai toan cua ta

Ta co

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{a_1}{a_2^2+1} + \frac{a_2}{a_3^2+1} + ... + \frac{a_n}{a_1^2+1} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{a_{i+1}^2+1} - a_i\right) + \sum_{i=1}^{n} a_i \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}^2}{a_{i+1}^2+1} + 2 \\
&\ge -\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ia_{i+1}^2}{2a_{i+1}} + 2 \quad \text{(theo bñt AM-GM)} \\
&= -\frac{1}{2}.\sum_{i=1}^{n} a_ia_{i+1} + 2 \\
&\ge -\frac{1}{8}.(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 + 2 \quad \text{(theo Bo ñe tren)} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Ñang thöc xay ra chang han khi $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = ... = a_n = 0.$

Vay

$$\min P = \frac{3}{2}$$

## Bai toan 64.

Cho $a, b$ la cac so thöc thoa $a+b \neq 0$ va $x, y > 1$ la cac hang so döông cho tröôc.

Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$f(a,b) = \frac{(a^2+1)^x(b^2+1)^y}{(a+b)^2}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc AM-GM mô rong, ta co

$$(a^2+1)^x = x^x\left[\frac{1}{x}.\left(a^2+\frac{1}{x+y-1}\right)+\frac{x-1}{x}.\frac{x+y-2}{(x+y-1)(x-1)}\right]^x$$

$$\geq x^x.\frac{(x+y-2)^{x-1}}{(x+y-1)^{x-1}(x-1)^{x-1}}.\left(a^2+\frac{1}{x+y-1}\right)$$

Töông tö, ta co

$$(b^2+1)^y \geq y^y.\frac{(x+y-2)^{y-1}}{(x+y-1)^{y-1}(y-1)^{y-1}}.\left(b^2+\frac{1}{x+y-1}\right)$$

Do ño

$$(a^2+1)^x(b^2+1)^y \geq x^x y^y.\frac{(x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-2}(x-1)^{x-1}(y-1)^{y-1}} \text{x}$$

$$\text{x}\left(a^2+\frac{1}{x+y-1}\right)\left(b^2+\frac{1}{x+y-1}\right)$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\left(a^2+\frac{1}{x+y-1}\right)\left(b^2+\frac{1}{x+y-1}\right) \geq \left(a.\frac{1}{\sqrt{x+y-1}}+b.\frac{1}{\sqrt{x+y-1}}\right)^2 = \frac{1}{x+y-1}.(a+b)^2$$

Do ño

$$(a^2+1)^x(b^2+1)^y \ge \frac{x^x y^y (x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-1}(x-1)^{x-1}(y-1)^{y-1}}.(a+b)^2$$

$$\Rightarrow f(a,b) \ge \frac{x^x y^y (x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-1}(x-1)^{x-1}(y-1)^{y-1}}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $\begin{cases} |a| = \sqrt{\dfrac{y-1}{(x+y-1)(x-1)}} \\ |b| = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+y-1)(y-1)}} \\ ab > 0 \end{cases}$

Vay $\min f(a,b) = \dfrac{x^x y^y (x+y-2)^{x+y-2}}{(x+y-1)^{x+y-1}(x-1)^{x-1}(y-1)^{y-1}}$

* Ghi chu.

Ñe co ñöôc mot lôi giai ngan gon nhö tren, ta phai trai qua mot böôc chon ñiem rôi nhö sau

Gia sö $M(a_0,b_0)$ la ñiem cöc trò cua ham so $f(a,b)$ thì $(a_0,b_0)$ la nghiem cua he phöông trình

$$\begin{cases} f_a^{/} = 0 \\ f_b^{/} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (y-1)b^2 + yab - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (x-1)a^2 + (x-y)ab - (y-1)b^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (a+b)((x-1)a - (y-1)b) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)a^2 + xab - 1 = 0 \\ (x-1)a = (y-1)b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |a| = \sqrt{\dfrac{y-1}{(x+y-1)(x-1)}} \\ |b| = \sqrt{\dfrac{x-1}{(x+y-1)(y-1)}} \\ ab > 0 \end{cases}$$

Töi ñay, ta ñi ñen mot lôi giai hôi “choang” nhö tren.

Bai toan 65. (Vasile Cirtoaje)

Cho $n \geq 3, n \in N, 0 < k \leq \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$ va $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoa $a_1a_2...a_n = 1$. Chöng minh

rang

$$\frac{1}{\sqrt{1+ka_1}} + \frac{1}{\sqrt{1+ka_2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1+ka_n}} \leq \frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

*Lôi giai.*

Ta co bo ñe sau

Bo ñe. $a_1, a_2, ..., a_n$ la $n$ so thöc döông thoa man

i) $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$

ii) $a_i \in (-\infty, +\infty) \quad \forall i = \overline{1, n}$

iii) $a_1 + a_2 + ... + a_n = C$

va $f$ la mot ham tren $(-\infty, +\infty)$ thoa man $f$ loi tren $(-\infty, c]$ va lom tren $[c, +\infty)$

Ñat $F = f(a_1) + f(a_2) + ... + f(a_n)$

Khi ño, $F$ ñat max khi $a_1 = a_2 = ... = a_{n-1} \leq a_n$.

*Chöng minh.*

Gia sö $a_i, a_{i+1}, ..., a_n \in [c, +\infty)$, do $f$ lom tren $[c, +\infty)$ nen

$$f(a_i) + f(a_{i+1}) + ... + f(a_n) \leq (i-1)f(c) + f(a_i + a_{i+1} + ... + a_n - (i-1)c)$$

Mat khac do $f$ loi tren $(-\infty, c]$ nen

$$(i-1)f(c)+f(a_1)+f(a_2)+...+f(a_{i-1})\le(n-1)f\left(\frac{(i-1)c+a_1+a_2+...+a_{i-1}}{n-1}\right)$$

Do ño

$$F=\sum_{k=1}^{n}f(a_k)\le(n-1)f\left(\frac{(i-1)c+a_1+a_2+...+a_{i-1}}{n-1}\right)+$$
$$+f(a_i+a_{i+1}+...+a_n-(i-1)c)$$

Bo ñe ñöôc chöng minh.

Trô lai bai toan cua ta

Ñat $y_i=ka_i\ (i=\overline{1,n})\Rightarrow y_1y_2...y_n=k^n$ vôi $k=\sqrt[n]{y_1y_2...y_n}\le\frac{2n-1}{(n-1)^2}$ . Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\frac{1}{\sqrt{1+y_1}}+\frac{1}{\sqrt{1+y_2}}+...+\frac{1}{\sqrt{1+y_n}}\le\frac{n}{\sqrt{k+1}}$$

Khong mat tính tong quat gia sö $0<y_1\le y_2\le...\le y_n$.

Ñat $x_1=\ln y_1,x_2=\ln y_2,...,x_n=\ln y_n$ thì $\begin{cases}x_1\le x_2\le...\le x_n\\ x_1+x_2+...+x_n=n\ln k\end{cases}$ (do $a_1a_2...a_n=1$)

Xet ham so $f(x)=\frac{1}{(e^x+1)^{1/2}}$

Ta co $f^{//}(x)=\frac{e^x.(e^x-2)}{4(e^x+1)^{5/2}}, f^{//}(x)=0\Leftrightarrow x=\ln 2$

Tö ño, ta co $f$ loi tren $(-\infty,\ln 2]$ va lom tren $[\ln 2,+\infty)$

$\Rightarrow$ Theo bo ñe tren, ta co

$P=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+y_i)^{1/2}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+e^{x_i})^{1/2}}$ ñat max khi $x_1=x_2=...=x_{n-1}\le x_n$.

$$\Rightarrow\max P\le\max\left\{\frac{n-1}{\sqrt{e^t+1}}+\frac{1}{\sqrt{e^{n\ln k-(n-1)t}+1}}\right\}\ (t\le\ln k)$$

$$= \max\left\{\frac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \frac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1}+k^n}}\right\} \ (x = e^t \le k) \qquad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ tìm max của hàm số $g(x) = \dfrac{n-1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{x^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{x^{n-1}+k^n}}$ với $x \le k$

Ta có $g^{/}(x) = \dfrac{n-1}{2}.\left(\dfrac{k^n x^{\frac{n-3}{2}}}{(x^{n-1}+k^n)^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{1}{(x+1)^{\frac{3}{2}}}\right)$

$$g^{/}(x) = 0 \Leftrightarrow k^n x^{\frac{n-3}{2}}.(x+1)^{\frac{3}{2}} = (x^{n-1}+k^n)^{\frac{3}{2}}$$

$$\Leftrightarrow k^{\frac{2n}{3}} x^{\frac{n-3}{3}}.(x+1) = x^{n-1} + k^n \qquad (2)$$

Đặt $t = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow t \le k^{\frac{2}{3}}$. Khi đó, phương trình (2) trở thành

$$k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}}.\left(t^{\frac{3}{2}}+1\right) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} + k^n$$

$$\Leftrightarrow t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n = 0$$

Xét hàm số $h(t) = t^{\frac{3(n-1)}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n}{2}} - k^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{n-3}{2}} + k^n$ với $t \le k^{\frac{2}{3}}$

Ta có $h^{/}(t) = \dfrac{1}{2}.t^{\frac{n-5}{3}}.\left(3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}\right)$

$$h^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}} = 0$$

Xét tiếp hàm số $m(t) = 3(n-1)t^n - nk^{\frac{2n}{3}} t^{\frac{3}{2}} - (n-3)k^{\frac{2n}{3}}$ với $t \le k^{\frac{2}{3}}$

Ta có $m^{/}(t) = \dfrac{3n}{2} t^{\frac{1}{2}}.\left(2(n-1)t^{\frac{2n-3}{2}} - k^{\frac{2n}{3}}\right)$

$$m^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow t_0 = \left(\frac{k^{\frac{2n}{3}}}{2(n-1)}\right)^{\frac{2}{2n-3}}$$

Do $0<k\le \dfrac{2n-1}{(n-1)^2}$ nein $t_0<k^{\frac{2}{3}}$. Qua $t_0$ thì $m^{/}(t)$ ñoi dau töi am sang döông nein

$m(t)$ nghòch bien trein $(0,t_0]$ vai ñoing bien trein $\left[t_0,k^{\frac{2}{3}}\right)$.

Ta lai coi $m(0)=3-n\le 0, m\left(k^{\frac{2}{3}}\right)=nk^{\frac{2n}{3}}(2-k)>0$ $\left(\text{do } 2>\dfrac{2n-1}{(n-1)^2}\ge k\right)$

Nein phöông trình $m(t)=0$ coi nghieim duy nhat $0<t_1<k^{\frac{2}{3}}$.

$\Rightarrow$ Phöông trình $h^{/}(t)=0$ coi nghieim duy nhat $0<t_1<k^{\frac{2}{3}}$

Baing bien thiein cuia $h(t)$

| $t$ | 0 | | $t_1$ | | $k^{2/3}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h^{/}(t)$ | | – | 0 | + | |
| $h(t)$ | $k^n$ | ↘ | | ↗ | 0 |

Cain cöi vao baing bien thiein, ta coi

$h(t)=0$ coi 2 nghieim döông phain bieit lai $k^{2/3}$ vai $t_2<t_1$.

Do ñoi $g^{/}(x)=0$ coi 2 nghieim döông phain bieit lai $k$ vai $t_2^{3/2}<t_1^{3/2}<k$.

Baing bien thiein cuia $g(x)$

| $x$ | 0 | | $t_2^{3/2}$ | | $k$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g^{/}(x)$ | | – | 0 | + | 0 |
| $g(x)$ | | ↘ | | ↗ | |

Cain cöi vao baing bien thiein, ta suy ra

$$g(x) \le \max\{g(0), g(k)\} = \frac{n}{\sqrt{k+1}} \quad \forall x \le k \tag{3}$$

Tö (1) va (3), ta suy ra ñpcm.

Bai toan 66.

Cho $a,b,c$ la ño dai ba canh cua mot tam giac. Chöng minh rang

$$\frac{a-b}{b(b+c-a)} + \frac{b-c}{c(c+a-b)} + \frac{c-a}{a(a+b-c)} \ge 0$$

*Lôi giai.*

Do $a,b,c$ la ño dai ba canh cua mot tam giac nen ton tai cac so thöc dööng $x,y,z$ sao cho $a = y+z, b = z+x, c = x+y$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \ge 0$$

Ñen ñay, ta co hai cach chöng minh cho bat ñang thöc tren

* Cach 1.

Co 2 tröông hôp xay ra

+ Tröông hôp 1. $x \ge y \ge z > 0$. Khi ño, ta co

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left(\frac{1}{z(y+z)} - \frac{1}{x(z+x)}\right) + (y-z)\left(\frac{1}{z(y+z)} - \frac{1}{y(x+y)}\right) \ge 0$$

Bat ñang thöc nay ñung do $x \ge y \ge z > 0.$

+ Tröông hôp 2. $z \ge y \ge x > 0$. Khi ño, ta co

$$\frac{y-x}{x(z+x)} + \frac{x-z}{z(y+z)} + \frac{z-y}{y(x+y)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (y-x)\left(\frac{1}{x(z+x)} - \frac{1}{z(y+z)}\right) + (z-y)\left(\frac{1}{y(x+y)} - \frac{1}{z(y+z)}\right) \ge 0$$

Bat ñang thöc nay ñung do $z \geq y \geq x > 0$.

Tom lai, trong moi tröông hôp ta luon co

$$\frac{y-x}{x(z+x)}+\frac{x-z}{z(y+z)}+\frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

* Cach 2.

Ta co

$$\frac{y-x}{x(z+x)}+\frac{x-z}{z(y+z)}+\frac{z-y}{y(x+y)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+z}.\frac{1}{z}+\frac{y}{z+x}.\frac{1}{x}+\frac{z}{x+y}.\frac{1}{y} \geq \frac{x}{y+z}.\frac{1}{x}+\frac{y}{z+x}.\frac{1}{y}+\frac{z}{x+y}.\frac{1}{z}$$

Ñieu nay ñung theo bat ñang thöc sap xep lai do $\left(\frac{x}{y+z},\frac{y}{z+x},\frac{z}{x+y}\right)$ va $\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y},\frac{1}{z}\right)$ la hai day ngöôc chieu nhau.

Vay ta co ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c$.

## Bai toan 67.

Cho $k \geq a,b,c,d > 0$. Chöng minh rang

$$\frac{a^4+b^4+c^4+d^4}{abcd} \geq \frac{(2k-a)^4+(2k-b)^4+(2k-c)^4+(2k-d)^4}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat, co the gia söi $k \geq a \geq b \geq c \geq d > 0$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{abcd}+\frac{(c^2-d^2)^2}{abcd}+\frac{2(a^2b^2+c^2d^2)}{abcd} \geq \frac{((2k-a)^2-(2k-b)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}+$$

$$+\frac{((2k-c)^2-(2k-d)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}+\frac{2((2k-a)^2(2k-b)^2+(2k-c)^2(2k-d)^2)}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{abcd} \ge \frac{((2k-a)^2-(2k-b)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)} \quad (1)$$

$$\frac{(c^2-d^2)^2}{abcd} \ge \frac{((2k-c)^2-(2k-d)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)} \quad (2)$$

$$\frac{2(a^2b^2+c^2d^2)}{abcd} \ge \frac{2((2k-a)^2(2k-b)^2+(2k-c)^2(2k-d)^2)}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)} \quad (3)$$

Ta co

$$\frac{(a^2-b^2)^2}{abcd} \ge \frac{((2k-a)^2-(2k-b)^2)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2(a+b)^2(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d) \ge (a-b)^2(4k-a-b)^2 abcd$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d) \ge (4k-a-b)^2 abcd$$

Do $k \ge c \ge d > 0$ nen $(2k-c)(2k-d) \ge cd > 0$. Do ño, ñe chöng minh (1), ta chæ can chöng minh

$$(a+b)^2(2k-a)(2k-b) \ge (4k-a-b)^2 ab$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\left(2k-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \ge \left(2k-\frac{a+b}{2}\right)^2\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\left(\left(2k-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) \ge 0$$ (ñung do $k \ge a \ge b > 0$)

Vay (1) ñung.

Chöng minh töông tö, ta co (2) ñung.

Tiep theo, ta se chöng minh (3) ñung.

Ta se chöng minh

$$\frac{ab}{cd} \ge \frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}$$

That vay

$$\frac{ab}{cd} \ge \frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a(2k-a)}{c(2k-c)}.\frac{b(2k-b)}{d(2k-d)} \ge 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2-(k-a)^2}{k^2-(k-c)^2}.\frac{k^2-(k-b)^2}{k^2-(k-d)^2} \ge 1 \text{ (ñuùng do } k \ge a \ge b \ge c > 0)$$

Vaäy

$$\frac{ab}{cd} \ge \frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)} \ge 1$$

Do haøm soá $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ñoàng bieán treân $[1,+\infty)$ neân ta coù

$$f\left(\frac{ab}{cd}\right) \ge f\left(\frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}\right)$$

Maët khaùc, ta coù

$$f\left(\frac{ab}{cd}\right) = \frac{a^2b^2+c^2d^2}{abcd}$$

$$f\left(\frac{(2k-c)(2k-d)}{(2k-a)(2k-b)}\right) = \frac{(2k-a)^2(2k-b)^2+(2k-c)^2(2k-d)^2}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

Do ñoù

$$\frac{2(a^2b^2+c^2d^2)}{abcd} \ge \frac{2((2k-a)^2(2k-b)^2+(2k-c)^2(2k-d)^2)}{(2k-a)(2k-b)(2k-c)(2k-d)}$$

Vaäy (3) ñuùng.

Tôùi ñaây, ta suy ra ñieàu phaûi chöùng minh.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a = b = c = d$.

## Baøi toaùn 68.

Cho $x, y, z > 0$ thoûa $x + y + z = 1$. Chöùng minh raèng

$$\sqrt{x^2+xyz} + \sqrt{y^2+xyz} + \sqrt{z^2+xyz} \ge \sqrt{x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+2\sqrt{3xyz}}$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\left(\sqrt{x^2+xyz}+\sqrt{y^2+xyz}+\sqrt{z^2+xyz}\right)^2 \ge x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+2\sqrt{3xyz}$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)}+2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)}+2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} \ge$$

$$\ge (xy+yz+zx-3xyz)+2\sqrt{3xyz}$$

Ta coù

$$\begin{aligned}2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)} &= 2\sqrt{xy(x(x+y+z)+yz)(y(x+y+z)+zx)}\\ &= 2(x+y)\sqrt{xy(z+x)(z+y)}\\ &= 2(x+y)\sqrt{x^2y^2+xyz}\\ &\ge (x+y)\left(xy+\sqrt{3xyz}\right) \text{ (theo bñt Bunhiacopxki)}\\ &= xy-xyz+(x+y)\sqrt{3xyz}\end{aligned}$$

Töông töï, ta coù

$$2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)} \ge yz-xyz+(y+z)\sqrt{3xyz}$$

$$2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} \ge zx-xyz+(z+x)\sqrt{3xyz}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{xy(x+yz)(y+zx)}+2\sqrt{yz(y+zx)(z+xy)}+2\sqrt{zx(z+xy)(x+yz)} \ge$$

$$\ge (xy+yz+zx-3xyz)+2\sqrt{3xyz}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $x=y=z=\dfrac{1}{3}$.

## Baøi toaùn 69. (USAMO 1999)

Cho caùc soá thöïc $a_1,a_2,...,a_n\ (n>3)$ thoûa $\begin{cases}a_1+a_2+...+a_n\ge n\\ a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\ge n^2\end{cases}$. Chöùng minh raèng

$$\max\{a_1,a_2,...a_n\}\ge 2.$$

*Lôøi giaûi.*

* Caùch 1.

Giaû söû ngöôïc laïi $a_i<2\ \forall i=\overline{1,n}$. Khi ñoù, ta coù

$$a_1+a_2+...+a_i-2(i-1)<2\ \forall i=\overline{1,n}$$

Do $a_i<2\ \forall i=\overline{1,n}$ neân

$$(2-a_i)(2-a_j)>0$$
$$\Rightarrow 4-2(a_i+a_j)+a_ia_j>0$$
$$\Leftrightarrow 8-4(a_i+a_j)+2a_ia_j>0$$
$$\Leftrightarrow (2^2-4(a_i+a_j)+(a_i+a_j)^2)+2^2>a_i^2+a_j^2$$
$$\Leftrightarrow (a_i+a_j-2)^2+2^2>a_i^2+a_j^2$$

Do ño

$$(a_1+a_2-2)^2+2^2>a_1^2+a_2^2$$
$$(a_1+a_2+a_3-2.2)^2+2^2>a_3^2+(a_1+a_2-2)^2$$
........
$$(a_1+a_2+...+a_n-2(n-1))^2+2^2>a_n^2+(a_1+a_2+...+a_{n-1}-2(n-2))^2$$

Cong $n-1$ bat ñang thöc tren lai ve theo ve, ta ñöôc

$$(a_1+a_2+...+a_n-2(n-1))^2+4(n-1)>a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

Do $a_i<2\ \forall i=\overline{1,n}$ va $a_1+a_2+...+a_n\geq n$ nen

$$2>a_1+a_2+...+a_n-2(n-1)\geq 2-n$$

Do $n\geq 4$ nen $n-2\geq 2$. Do ño

$$n-2>a_1+a_2+...+a_n-2(n-1)\geq 2-n$$
$$\Rightarrow (n-2)^2>(a_1+a_2+...+a_n-2(n-1))^2$$
$$\Rightarrow (n-2)^2+4(n-1)>(a_1+a_2+...+a_n-2(n-1))^2+4(n-1)$$

Do ño

$$n^2=(n-2)^2+4(n-1)>a_1^2+a_2^2+...+a_n^2$$

Ñieu nay trai vôi gia thiet $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq n^2$.

Vay ta phai co $\max\{a_1,a_2,...,a_n\}\geq 2$.

* Cach 2.

Gia sö ngöôc lai $a_i<2\ \forall i=\overline{1,n}$.

Ñat $b_i=2-a_i\ \ (i=\overline{1,n}), S=\sum_{i=1}^{n}b_i$ va $T=\sum_{i=1}^{n}b_i^2$. The thì, tö gia thiet, ta co

$$\begin{cases}(2-b_1)+(2-b_2)+...+(2-b_n)\ge n\\(2-b_1)^2+(2-b_2)^2+...+(2-b_n)^2\ge n^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S\le n\\T\ge n^2-4n+4S\end{cases}$$

Tö ñay, ta co

$$\begin{aligned}T&\ge n^2-4n+4S\\&=(n-4)n+4S\\&\ge S(n-4)+4S\ \text{(do } n\ge 4)\\&=nS \qquad (1)\end{aligned}$$

Do $a_i<2\ \forall i=\overline{1,n}$ nen $b_i>0\ \forall i=\overline{1,n}\Rightarrow b_i<n\ \forall i=\overline{1,n}$ (do $S\le n$). Do ño

$$T=\sum_{i=1}^{n}b_i^2<\sum_{i=1}^{n}nb_i=nS \qquad (2)$$

Tö (1) va (2), ta suy ra mau thuan. Vay ta phai co

$\max\{a_1,a_2,...,a_n\}\ge 2$ (ñpcm)

## Bai toan 70. (Toan Hoc Tuoi Tre 2006)

Cho cac so thöc $a,b,c,a_1,b_1,c_1$ $(aa_1\ne 0)$ thoa

$$\left(\frac{c}{a}-\frac{c_1}{a_1}\right)^2+\left(\frac{b}{a}-\frac{b_1}{a_1}\right).\frac{bc_1-b_1c}{aa_1}<0$$

Chöng minh rang hai phöông trình $ax^2+bx+c=0$ va $a_1x^2+b_1x+c_1=0$ ñeu co hai nghiem phan biet va cac nghiem nay nam xen ke nhau khi bieu dien tren truc so.

*Lôi giai.*

Khong mat tính tong quat, ta chæ can xet $a=a_1=1$ la ñu.

Khi ño, bai toan chuyen ve

"Caùc soá thöïc $b, c, b_1, c_1$ thoûa $(c-c_1)^2+(b-b_1)(bc_1-b_1c)<0$. Khi ñoù, caùc phöông trình $f(x)=x^2+bx+c=0$ vaø $g(x)=x^2+b_1x+c_1=0$ ñeàu coù hai nghieäm phaân bieät vaø caùc nghieäm naøy naèm xen keõ nhau khi bieåu dieãn treân truïc soá."

Ñeå chöùng minh hai phöông trình naøy coù hai nghieäm phaân bieät, ta caàn phaûi chöùng minh $\begin{cases}\Delta_f=b^2-4c>0\\ \Delta_g=b_1^2-4c_1>0\end{cases}$

Tröôùc heát, ta chöùng minh $(b^2-4c)(b_1^2-4c_1)>0$

Giaû söû ngöôïc laïi $(b^2-4c)(b_1^2-4c_1)\le 0 \Rightarrow b^2c_1+b_1^2c-2cc_1\ge \dfrac{b^2b_1^2}{4}+2cc_1$. Do ñoù

$$\begin{aligned}(c-c_1)^2+(b-b_1)(bc_1-b_1c)&=(b^2c_1+b_1^2c-2cc_1)+c^2+c_1^2-bb_1(c+c_1)\\ &\ge \frac{b^2b_1^2}{4}+2cc_1+c^2+c_1^2-bb_1(c+c_1)\\ &=\frac{1}{4}.(bb_1-2(c+c_1))^2\\ &\ge 0\end{aligned}$$

Ñieàu naøy traùi vôùi giaû thieát.

Vaäy ta phaûi coù $(b^2-4c)(b_1^2-4c_1)>0$ (*)

Tieáp theo, ta seõ chöùng minh $\begin{cases}b^2-4c>0\\ b_1^2-4c_1>0\end{cases}$. Giaû söû ñieàu naøy khoâng ñuùng. Khi ñoù, töø (*), ta coù $\begin{cases}b^2-4c<0\\ b_1^2-4c_1<0\end{cases}$. Do ñoù

$$\begin{aligned}(c-c_1)^2+(b-b_1)(bc_1-b_1c)&=(c-c_1)^2+b^2c_1+b_1^2c-bb_1(c+c_1)\\ &\ge (c-c_1)^2+2bb_1\sqrt{cc_1}-bb_1(c+c_1)\\ &=(c-c_1)^2-bb_1\left(\sqrt{c}-\sqrt{c_1}\right)^2\\ &=\left(\sqrt{c}-\sqrt{c_1}\right)^2\left(\left(\sqrt{c}+\sqrt{c_1}\right)^2-bb_1\right)\end{aligned}$$

$$\geq \left(\sqrt{c}-\sqrt{c_1}\right)^2\left(4\sqrt{cc_1}-bb_1\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{c}-\sqrt{c_1}\right)^2\left(4\sqrt{\frac{b^2}{4}.\frac{b_1^2}{4}}-bb_1\right)$$

$$=0$$

Ñieu nay trai vôi gia thiet.

Vay ta phai co $\begin{cases} b^2-4c>0 \\ b_1^2-4c_1>0 \end{cases}$.

Töc la cac phöông trình $f(x)=x^2+bx+c=0$ va $g(x)=x^2+b_1x+c_1=0$ ñeu co hai nghiem phan biet.

Goi $x_1, x_2$ la cac nghiem cua phöông trình $f(x)=x^2+bx+c=0$ thì theo ñònh ly Viet, ta co $x_1+x_2=-b$ va $x_1x_2=c$. Ñe chöng minh $f(x)$ va $g(x)$ co cac nghiem nam xen ke nhau khi bieu dien tren truc so, ta chæ can chöng minh

$$g(x_1).g(x_2)<0$$

Ta co

$$\begin{cases} x_1^2+bx_1+c=0 \\ x_2^2+bx_2+c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2=-bx_1-c \\ x_2^2=-bx_2-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(x_1)=(b_1-b)x_1+c_1-c \\ g(x_2)=(b_1-b)x_2+c_1-c \end{cases}$$

Do ño

$$\begin{aligned} g(x_1).g(x_2) &= ((b_1-b)x_1+c_1-c)((b_1-b)x_2+c_1-c) \\ &= (c_1-c)^2+(c_1-c)(b_1-b)(x_1+x_2)+(b_1-b)^2x_1x_2 \\ &= (c_1-c)^2-b(c_1-c)(b_1-b)+c(b_1-b)^2 \\ &= (c_1-c)^2+(b_1-b)(c(b_1-b)-b(c_1-c)) \\ &= (c_1-c)^2+(b-b_1)(bc_1-b_1c)<0 \text{ (theo gt)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow g(x_1).g(x_2)<0$$

Vay $f(x)$ va $g(x)$ co cac nghiem nam xen ke nhau khi bieu dien tren truc so.

Töø cac chöng minh tren, ta suy ra ñpcm.

## Bai 71.

Cho cac so döông $a,b,c$ thoa $21ab+2bc+8ca\le 12$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{3}{c}$$

*Lôi giai.*

+ Cach 1.

Ñat $x=\frac{1}{a},y=\frac{2}{b},z=\frac{3}{c},$ bai toan chuyen ve

$x,y,z>0$ thoa $2x+4y+7z\le 2xyz$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=x+y+z$$

Khong mat tính tong quat, ta chæ can xet tröông hôp $2x+4y+7z=2xyz$ la ñu (tai sao?). Ñat $x=\sqrt{7}m, y=\frac{\sqrt{7}}{2}.n, z=\frac{2\sqrt{7}}{7}.p$ thì ta co $m+n+p=mnp$. Do ño, ton tai tam giac nhon $ABC$ sao cho $m=\text{tg}A, n=\text{tg}B, p=\text{tg}C$. Khi ño, ta co

$$P=\frac{\sqrt{7}}{14}.(14\text{tg}A+7\text{tg}B+4\text{tg}C)$$

Xet ham so $f(x)=\text{tg}x$ vôi $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Ta co

$$f'(x)=\text{tg}^2x+1$$
$$f''(x)=2\text{tg}x(\text{tg}^2x+1)>0$$

$\Rightarrow$ $f(x)$ la ham lom tren $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Do ño, theo tính chat ham lom, ta co

$$f(A)\ge f\left(\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)+f'\left(\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\left(A-\text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{7} + \frac{16}{7}.\left( A - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 14f(A) \geq 6\sqrt{7} + 32\left( A - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} \right)$$

Töông tö, ta co

$$f(B) \geq f\left( \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \right) + f'\left( \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \right)\left( B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$= \frac{5\sqrt{7}}{7} + \frac{32}{7}.\left( B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$\Rightarrow 7f(B) \geq 5\sqrt{7} + 32\left( B - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \right)$$

$$f(C) \geq f\left( \text{arctg}\sqrt{7} \right) + f'\left( \text{arctg}\sqrt{7} \right)\left( C - \text{arctg}\sqrt{7} \right)$$

$$= \sqrt{7} + 8\left( C - \text{arctg}\sqrt{7} \right)$$

$$\Rightarrow 4f(C) \geq 4\sqrt{7} + 32\left( C - \text{arctg}\sqrt{7} \right)$$

Do ño

$$P = \frac{\sqrt{7}}{14}.(14f(A) + 7f(B) + 4f(C))$$

$$\geq \frac{\sqrt{7}}{14}.\left( 15\sqrt{7} + 32\left( A + B + C - \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} - \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} - \text{arctg}\sqrt{7} \right) \right)$$

$$= \frac{15}{2} \text{ (vì } A + B + C = \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} + \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} + \text{arctg}\sqrt{7} = \pi \text{)}$$

Ñang thöùc xay ra khi va chæ khi $\begin{cases} A = \text{arctg}\frac{3\sqrt{7}}{7} \\ B = \text{arctg}\frac{5\sqrt{7}}{7} \\ C = \text{arctg}\sqrt{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = \frac{5}{2} \\ p = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$

Vay

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

+ Cach 2.

Đặt $a = \frac{1}{3x}, b = \frac{4}{5y}, c = \frac{3}{2z}$, bài toán chuyển về

“ $x, y, z > 0$ và $3x + 5y + 7z \le 15xyz$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{2}.(6x + 5y + 4z).”$$

Áp dụng bất đẳng AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$15xyz \ge 3x + 5y + 7z \ge 15\sqrt[15]{x^3y^5z^7}$$
$$\Rightarrow \sqrt[15]{x^{12}y^{10}z^8} \ge 1$$
$$\Leftrightarrow \sqrt[15]{x^6y^5z^4} \ge 1$$

Lại áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 15 số dương, ta có

$$P = \frac{1}{2}.(6x + 5y + 4z) \ge \frac{15}{2}.\sqrt[15]{x^6y^5z^4} \ge \frac{15}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = y = z \\ 15xyz = 3x + 5y + 7z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}.$

Kết luận

$$\min P = \frac{15}{2}.$$

## Bai toan 72.

Cho $a,b,c>0$. Chöng minh rang

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c}}\ge 2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}+1}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\sqrt{a(a+b)(a+c)}\ge 2\sqrt{(a+b+c)(ab+bc+ca)}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}a(a+b)(a+c)+2\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{ab(a+c)(b+c)}\ge 4(a+b+c)(ab+bc+ca)$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+2\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{ab(a+c)(b+c)}\ge 3\sum_{cyc}ab(a+b)+9abc$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co $(a+c)(b+c)\ge\left(\sqrt{ab}+c\right)^2$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$a^3+b^3+c^3+2\sum_{cyc}(a+b)\left(c+\sqrt{ab}\right)\sqrt{ab}\ge 3\sum_{cyc}ab(a+b)+9abc$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3+2\sqrt{abc}.\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{c}\ge\sum_{cyc}ab(a+b)+9abc$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$2\sqrt{abc}.\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{c}\ge 12abc$$

Do ño, theo bat ñang thöc Schur, ta co

$$\begin{aligned}a^3+b^3+c^3+2\sqrt{abc}.\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{c}&\ge a^3+b^3+c^3+12abc\\&=(a^3+b^3+c^3+3abc)+9abc\\&\ge\sum_{cyc}ab(a+b)+9abc\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+2\sqrt{abc}.\sum_{cyc}(a+b)\sqrt{c}\ge\sum_{cyc}ab(a+b)+9abc$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$ hoac $a=b,c\to 0$ va cac hoan vò.

Bai toan 73. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c\ge 0$ thoa $a+b+c=1$. Chöng minh rang

$$ab+bc+ca\ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^2+b^2+c^2+16abc)$$

*Lôi giai.*

Ñat $q=ab+bc+ca, r=abc\Rightarrow\begin{cases}q,r\ge 0\\ q\le\dfrac{1}{3}\end{cases}$ the thì theo bat ñang thöc Schur, ta co

$r\ge\dfrac{4q-1}{9}$. Tö cach ñat, ta co

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=q^2-2r$$
$$a^2+b^2+c^2=1-2q$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$q\ge 8(q^2-2r)(16r+1-2q)$$
$$\Leftrightarrow f(r)=8(2r-q^2)(16r+1-2q)+q\ge 0$$

Ta co $f'(r)=6(32r-(4q-1)(2q+1))$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $1\ge 4q\Rightarrow f'(r)\ge 0\Rightarrow f(r)$ la ham ñong bien $\forall r\ge 0$.

* Tröông hôp 2. $4q\ge 1\Rightarrow r\ge\dfrac{4q-1}{9}\ge 0$. Do ño

$$\begin{aligned}f'(r)=6(32r-(4q-1)(2q+1))&\ge 6\left(\frac{32(4q-1)}{9}-(4q-1)(2q+1)\right)\\&=\frac{2(4q-1)(23-18q)}{3}\\&\ge 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow f(r)$ la ham ñong bien $\forall r\ge 0$.

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co $f(r)$ la ham ñong bien $\forall r\ge 0$. Do ño

$$f(r)\ge f(0)=q(4q-1)^2\ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

*** Nhan xet.**

Co the de dang chöng minh ñöôc 16 la hang so tot nhat cho bat ñang thöc

$$ab+bc+ca\ge 8(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(a^2+b^2+c^2+kabc)$$

**Bai toan 74. (Vo Quoc Ba Can)**

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{c^3+1}+\frac{b}{a^3+1}+\frac{c}{b^3+1}\ge\frac{3}{2}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$2\sum_{cyc}a(a^3+1)(b^3+1)\ge 3(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}a^4b^3+2\sum_{cyc}a^4+2\sum_{cyc}ab^3+2\sum_{cyc}a\ge 3\sum_{cyc}a^3b^3+3\sum_{cyc}a^3+6$$

$$\Leftrightarrow\left(2\sum_{cyc}a^4b^3+\sum_{cyc}ab^3-3\sum_{cyc}a^3b^3\right)+\left(2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-3\sum_{cyc}a^3\right)+2\left(\sum_{cyc}a-3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}ab^3(a-1)^2(2a+1)+\left(2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-3\sum_{cyc}a^3\right)+2\left(\sum_{cyc}a-3\right)\ge 0$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-3\sum_{cyc}a^3\ge 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{cyc}a\ge 3 \qquad (2)$$

*** Chöng minh (1).**

Ta co

$$\begin{aligned}2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-3\sum_{cyc}a^3&=2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-3\sqrt[3]{abc}.\sum_{cyc}a^3\\&\ge 2\sum_{cyc}a^4+\sum_{cyc}ab^3-(a+b+c).\sum_{cyc}a^3 \quad \text{(theo AM-GM)}\\&=a^4+b^4+c^4-a^3b-b^3c-c^3a\\&=\frac{1}{4}.\sum_{cyc}(3a^4+b^4-3a^3b)\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}.\sum_{cyc}(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ (1) ñuùng.

* Chöùng minh (2).

Ta coù

$$\sum_{cyc} a - 3 = \sum_{cyc} a - 3\sqrt[3]{abc} = \frac{1}{2}.\left(\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\right).\sum_{cyc}\left(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}\right)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow$ (2) ñuùng.

Töø (1) vaø (2), ta suy ra ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c=1$.

Baøi toaùn 75. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c>0$ thoûa $a+b+c=3$. Chöùng minh raèng

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1} \geq 1$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù

$$\frac{1}{2ab^2+1}+\frac{1}{2bc^2+1}+\frac{1}{2ca^2+1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2ab^2+1}-1\right)+\left(\frac{1}{2bc^2+1}-1\right)+\left(\frac{1}{2ca^2+1}-1\right)+3$$

$$= 3-2.\sum_{cyc}\frac{ab^2}{2ab^2+1}$$

$$\geq 3-2.\sum_{cyc}\frac{ab^2}{3\sqrt[3]{a^2b^4}} \quad \text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$= 3-\frac{2}{3}.\sum_{cyc}\sqrt[3]{ab^2}$$

$$\geq 3-\frac{2}{3}.\sum_{cyc}\frac{a+2b}{3} \quad \text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$= 3 - \frac{2}{3}.\sum_{cyc} a$$

$$= 3 - \frac{2}{3}.3$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2ab^2+1} + \frac{1}{2bc^2+1} + \frac{1}{2ca^2+1} \ge 1 \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a = b = c = 1$.

## Baøi toaùn 76. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c \ge 0$. Chöùng minh raèng

$$(a^2 - bc)\sqrt{b+c} + (b^2 - ca)\sqrt{c+a} + (c^2 - ab)\sqrt{a+b} \ge 0$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\sum_{cyc}(2a^2 - 2bc)\sqrt{b+c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}((a+c)(a-b) - (a+b)(c-a))\sqrt{b+c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a+c)(a-b)\sqrt{b+c} - \sum_{cyc}(a+b)(c-a)\sqrt{b+c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a+c)(a-b)\sqrt{b+c} - \sum_{cyc}(b+c)(a-b)\sqrt{a+c} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\sqrt{(a+c)(b+c)}.\left(\sqrt{a+c} - \sqrt{b+c}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2\sqrt{(a+c)(b+c)}}{\sqrt{a+c}+\sqrt{b+c}} \ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a = b = c$.

Bai toan 77.

Cho $a,b,c>0$ va $k$ la hang so döông cho tröôc. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$f(a,b,c)=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+\frac{kabc}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x=a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a, y=6abc$. Khi ño, ta co

$$f(a,b,c)=\frac{6x}{y}+\frac{ky}{6x+2y}=6t+\frac{k}{6t+2}$$

trong ño $t=\frac{x}{y}\geq 1$.

Ñat $g(t)=6t+\frac{k}{6t+2}$ vôi $t\geq 1$, ta can tìm gia trò nho nhat cua $g(t)$.

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $k\leq 64$. Khi ño, ta co

$$g(t)-6-\frac{k}{8}=\frac{3(t-1)(48t-k+16)}{8(3t+1)}\geq 0$$

$$\Rightarrow g(t)\geq 6+\frac{k}{8}$$

$$\Rightarrow f(a,b,c)\geq 6+\frac{k}{8}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $t=1\Leftrightarrow a=b=c.$

Vay trong tröông hôp nay, ta co

$$\min f(a,b,c)=6+\frac{k}{8}$$

* Tröông hôp 2. $k\geq 64$. Khi ño, ta co

$$g^{/}(t)=\frac{6\left(6t+2-\sqrt{k}\right)\left(6t+2+\sqrt{k}\right)}{(6t+2)^2}$$

$$g^{/}(t)=0 \Leftrightarrow t=t_0=\frac{\sqrt{k}-2}{6}$$

Qua $t_0$ thì $g^{/}(t)$ ñoi dau tö am sang döông nen ta co

$$g(t)\geq g(t_0)=2\sqrt{k}-2 \quad \forall t\geq 1$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\geq 2\sqrt{k}-2$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi

$$t=\frac{\sqrt{k}-2}{6} \Leftrightarrow a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+c^2b+b^2a=\left(\sqrt{k}-2\right)abc \text{ (*)}$$

Ta chæ can chöng minh rang ton tai bo so döông $(a,b,c)$ thoa man he thöc (*) la bai toan ñöôc giai quyet hoan toan.

That vay, cho $b=c=1$ thì he thöc (*) trô thanh

$$f(a)=a^2-\left(\frac{\sqrt{k}}{2}-2\right)a+1=0$$

Ta co $\lim\limits_{a\to 0^+} f(a)=1>0,\ f(1)=4-\frac{\sqrt{k}}{2}\leq 4-\frac{\sqrt{64}}{2}=0$. Do ño, ton tai $a\in(0,1]$ sao cho $f(a)=0$. Vay ton tai bo so $(a,b,c)$ thoa man he thöc (*).

Do ño, trong tröông hôp nay, ta co

$$\min f(a,b,c)=2\sqrt{k}-2$$

Ket luan

+ Neu $k\leq 64$ thì $\min f(a,b,c)=6+\dfrac{k}{8}$

+ Neu $k\geq 64$ thì $\min f(a,b,c)=2\sqrt{k}-2$

## Bai toan 78. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c>0$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{8a^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{8b^3+1}}\ge 1$$

*Lôi giai.*

Ta co nhan xet sau

$$\frac{1}{\sqrt{8x^3+1}}\ge\frac{1}{2x^2+1}\quad \forall x>0 \qquad (*)$$

That vay

$$\begin{aligned}(*)&\Leftrightarrow 2x^2+1\ge\sqrt{8x^3+1}\\ &\Leftrightarrow (2x^2+1)^2\ge 8x^3+1\\ &\Leftrightarrow 4x^2(x-1)^2\ge 0 \text{ (ñung)}\end{aligned}$$

Vay (*) ñung.

Do ño

$$\frac{a}{\sqrt{8c^3+1}}+\frac{b}{\sqrt{8a^3+1}}+\frac{c}{\sqrt{8b^3+1}}\ge\frac{a}{2c^2+1}+\frac{b}{2a^2+1}+\frac{c}{2b^2+1}$$

Nhö vay, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\begin{aligned}&\frac{a}{2c^2+1}+\frac{b}{2a^2+1}+\frac{c}{2b^2+1}\ge 1\\ &\Leftrightarrow \sum_{cyc}a(2a^2+1)(2b^2+1)\ge(2a^2+1)(2b^2+1)(2c^2+1)\\ &\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}a^3b^2+2\sum_{cyc}a^3+2\sum_{cyc}ab^2+\sum_{cyc}a\ge 9+2\sum_{cyc}a^2+4\sum_{cyc}a^2b^2\\ &\Leftrightarrow 2\left(\sum_{cyc}a^3b^2+\sum_{cyc}ab^2-2\sum_{cyc}a^2b^2\right)+2\left(\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}a^2\right)+2\sum_{cyc}a^3b^2+\sum_{cyc}a\ge 9\\ &\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}ab^2(a-1)^2+2\left(\sum_{cyc}a^3-\sum_{cyc}a^2\right)+2\sum_{cyc}a^3b^2+\sum_{cyc}a\ge 9 \qquad (**)\end{aligned}$$

Lai co theo bat ñang thöc AM-GM thì

$$2\sum_{cyc} a^3b^2 + \sum_{cyc} a \ge 6\sqrt[3]{a^5b^5c^5} + 3\sqrt[3]{abc} = 9$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc (**), ta ch can chöng minh

$$\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 \ge 0 \qquad (***)$$

Nhöng ñieu nay hien nhien ñung vì

$$\sum_{cyc} a^3 - \sum_{cyc} a^2 = \frac{1}{3}.\left(3\sum_{cyc} a^3 - 3\sqrt[3]{abc}.\sum_{cyc} a^2\right)$$

$$\ge \frac{1}{3}.\left(3\sum_{cyc} a^3 - \left(\sum_{cyc} a\right).\sum_{cyc} a^2\right) \text{ (theo bñt AM-GM)}$$

$$= \frac{1}{3}.\sum_{cyc}(a-b)^2(a+b)$$

$$\ge 0$$

Vay (***) ñung.

Tö ñay, ta suy ra ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va ch khi $a = b = c = 1$.

* Ghi chu.

Ngoai ra, ta con co mot cach khac ñe chöng minh bat ñang thöc

$$\frac{a}{2c^2+1} + \frac{b}{2a^2+1} + \frac{c}{2b^2+1} \ge 1$$

Cu the nhö sau

Do $a, b, c > 0, abc = 1$ nen ton tai cac so thöc döông $x, y, z$ sao cho $a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$. Khi ño, bat ñang thöc tren trô thanh

$$\frac{x^3}{y(2z^2+x^2)} + \frac{y^3}{z(2x^2+y^2)} + \frac{z^3}{x(2y^2+z^2)} \ge 1$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\frac{x^3}{y(2z^2+x^2)}+\frac{y^3}{z(2x^2+y^2)}+\frac{z^3}{x(2y^2+z^2)}=\frac{x^4}{xy(2z^2+x^2)}+\frac{y^4}{yz(2x^2+y^2)}+\frac{z^4}{zx(2y^2+z^2)}$$
$$\geq \frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)}$$

Do ñoù, ñeå chöùng minh baát ñaúng thöùc ñaõ cho, ta chæ caàn chöùng minh

$$\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^3y+y^3z+z^3x+2xyz(x+y+z)}\geq 1$$
$$\Leftrightarrow \left(\sum_{cyc}x^4-\sum_{cyc}x^3y\right)+2\left(\sum_{cyc}x^2y^2-\sum_{cyc}x^2yz\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}.\sum_{cyc}(x-y)^2(3x^2+2xy+y^2)+\sum_{cyc}z^2(x-y)^2\geq 0 \text{ (ñuùng)}$$
$$\Rightarrow \text{ñpcm.}$$

## Baøi toaùn 79. (Ñinh Ngoïc An)

Cho $a,b,c\geq 0$ thoûa $a+b+c=ab+bc+ca$. Tìm giaù trò nhoû nhaát vaø giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc

$$S=\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}$$

*Lôøi giaûi.*

Ta seõ chöùng minh raèng $\max S=\frac{3}{2}$ vaø khoâng coù $\min S$.

Thaät vaäy, töø giaû thieát, ta coù

$$S=\frac{ab+bc+ca}{a+b+c}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)=1+\frac{1}{a+b+c}.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)$$

Do ñoù $S>1$.

Cho $c=0, b=\frac{a}{a-1}$ $(a>1)$ thì ta cuõng coù $a+b+c=ab+bc+ca$. Khi ñoù, ta coù

$$S=1+\frac{a-1}{a}$$
$$\Rightarrow \lim_{a\to 1^+}S=1.$$

Vay khong ton tai $\min S$.

Mat khac, ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\begin{aligned}S &= 1+\frac{1}{a+b+c}.\left(\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\right)\\ &\le 1+\frac{1}{a+b+c}.\left(\frac{\frac{1}{4}.(a+b)^2}{a+b}+\frac{\frac{1}{4}.(b+c)^2}{b+c}+\frac{\frac{1}{4}.(c+a)^2}{c+a}\right)\\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Ñang thöc xay ra chang han khi $a=b=c=1$.

Vay $\max S=\frac{3}{2}$.

## Bai toan 80. (Ñinh Ngoc An)

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thoa $ab+bc+cd+da=1$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$f(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2+2abcd$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$ab+bc+cd+da=1 \Leftrightarrow (a+c)(b+d)=1$$

Neu $ac\ge 1$ thì de thay $f(a,b,c,d)\ge 2$.

Neu $ac\le 1$. Khi ño, ta co

$$f(a,b,c,d)-f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)=\frac{(b-d)^2(1-ac)}{2}\ge 0$$

$$\Rightarrow f(a,b,c,d)\ge f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)$$

Bay giô, neu $\frac{(b+d)^2}{4}\ge 1$ thì de thay $f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\ge 2$.

Do ño $f(a,b,c,d)\ge 2$. Neu $\frac{(b+d)^2}{4}\le 1$ thì bang lap luan töông tö nhö tren, ta co

$$f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\geq f\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)$$

Do ño

$$\begin{aligned}f(a,b,c,d)&\geq f\left(a,\frac{b+d}{2},c,\frac{b+d}{2}\right)\\&\geq f\left(\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2},\frac{a+c}{2},\frac{b+d}{2}\right)\\&=\frac{(a+c)^2}{2}+\frac{(b+d)^2}{2}+\frac{(a+c)^2(b+d)^2}{8}\\&\geq 1+\frac{1}{8}\\&=\frac{9}{8}\end{aligned}$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co $f(a,b,c,d)\geq\frac{9}{8}$.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=d=\frac{1}{2}$.

Vay $\min f(a,b,c,d)=\frac{9}{8}$.

## Bai toan 81. (Ñinh Ngoc An)

Cho $a,b,c,d\geq 0$ thoa $ab+bc+cd+da+ac+bd=1$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$f(a,b,c,d)=a^2+b^2+c^2+d^2+2abcd$$

*Lôi giai.*

Xet so thöc khong am $y$ thoa man

$$y^2+ab+2y(a+b)=1\Leftrightarrow(a+b)(c+d-2y)=y^2-cd\qquad(*)$$

(chu y rang $y$ luon luon ton tai)

Khi ño, ta phai co $y\leq\frac{c+d}{2}$. That vay, gia sö ngöôc lai $y>\frac{c+d}{2}$. Khi ño, ta co

$$\begin{aligned} y^2+ab+2y(a+b) &> \left(\frac{c+d}{2}\right)^2+ab+(a+b)(c+d) \\ &\geq cd+ab+(a+b)(c+d) \\ &= ab+bc+cd+da+ac+bd \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ñieu nay mau thuan vì $y^2+ab+2y(a+b)=1$.

Vay, ta phai co $y \leq \frac{c+d}{2}$. Do ño, tö (*), ta suy ra ñöôc $y^2 \geq cd$. Khi ño, ta co

$$f(a,b,c,d)-f(a,b,y,y)=(c-d)^2+2(1-ab)(y^2-cd)\geq 0$$
$$\Rightarrow f(a,b,c,d)\geq f(a,b,y,y)$$

Bang lap luan töông tö, ta dan ñen

$$f(a,b,c,d)\geq f(x,x,y,y)=2(x^2+y^2+x^2y^2)$$

Vôi $x,y\geq 0$ thoa man $x^2+y^2+4xy=1$.

Nen

$$f(a,b,c,d)\geq f(x,x,y,y)=2(x^2+y^2+x^2y^2)\geq\frac{13}{18}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=d=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

Vay $\min f(a,b,c,d)=\frac{13}{18}$.

### Bai toan 82.

Cho $x,y,z>0$ thoa $xy+yz+zx+xyz=4$. Tìm hang so $k$ tot nhat cho bat ñang thöc

$$x^2+y^2+z^2+3k\geq(k+1)(x+y+z)$$

*Lôi giai.*

Cho $x=y=\sqrt{2}, z=\sqrt{2}-1$, ta suy ra ñöôc $k\leq 2\sqrt{2}+1$. Ta se chöng minh ñay la gia trò can tìm, töc la chöng minh

$$x^2+y^2+z^2+3\left(2\sqrt{2}+1\right)\ge 2\left(\sqrt{2}+1\right)(x+y+z) \qquad (*)$$

Tö gia thiet $xy+yz+zx+xyz=4$, ta suy ra ñöôc

$$\frac{1}{x+2}+\frac{1}{y+2}+\frac{1}{z+2}=1$$

Do ño, ta co the ñat $m=\dfrac{1}{x+2}, n=\dfrac{1}{y+2}, p=\dfrac{1}{z+2}\Rightarrow\begin{cases} m+n+p=1 \\ 0<m,n,p<\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow m,n,p$ la

ño dai ba canh cua mot tam giac. Do ño, ton tai cac so thöc döông $a,b,c$ sao cho

$m=b+c, n=c+a, p=a+b.$ Khi ño, tö cach ñat, ta co

$$x=\frac{1-2m}{m}=\frac{n+p-m}{m}=\frac{2a}{b+c}$$
$$y=\frac{1-2n}{n}=\frac{p+m-n}{n}=\frac{2b}{c+a}$$
$$z=\frac{1-2p}{p}=\frac{m+n-p}{p}=\frac{2c}{a+b}$$

Bat ñang thöc (*) trô thanh

$$\sum_{cyc}\frac{4a^2}{(b+c)^2}+3\left(2\sqrt{2}+1\right)\ge 2\left(\sqrt{2}+1\right).\sum_{cyc}\frac{2a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{4a^2}{(b+c)^2}-\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)a}{b+c}+\left(2\sqrt{2}+1\right)\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4a^2-4\left(\sqrt{2}+1\right)a(b+c)+\left(2\sqrt{2}+1\right)(b+c)^2}{(b+c)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{\left(2a-\left(2\sqrt{2}+1\right)b-\left(2\sqrt{2}+1\right)c\right)(a-b)}{(b+c)^2}-$$

$$-\sum_{cyc}\frac{\left(2a-\left(2\sqrt{2}+1\right)b-\left(2\sqrt{2}+1\right)c\right)(c-a)}{(b+c)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{\left(2a-\left(2\sqrt{2}+1\right)b-\left(2\sqrt{2}+1\right)c\right)(a-b)}{(b+c)^2}-$$

$$-\sum_{cyc}\frac{\left(2b-\left(2\sqrt{2}+1\right)c-\left(2\sqrt{2}+1\right)a\right)(a-b)}{(a+c)^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a^2-b^2)^2\left(2a^2+2b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ab+\left(3-2\sqrt{2}\right)c(a+b)\right)\ge 0$$

Ñat

$$S_{a^2}=2b^2+2c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)a^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)bc+\left(3-2\sqrt{2}\right)a(b+c)$$

$$S_{b^2}=2c^2+2a^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ca+\left(3-2\sqrt{2}\right)b(c+a)$$

$$S_{c^2}=2a^2+2b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ab+\left(3-2\sqrt{2}\right)c(a+b)$$

Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$S_{a^2}(b^2-c^2)^2+S_{b^2}(c^2-a^2)^2+S_{c^2}(a^2-b^2)^2\ge 0$$

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $a\ge b\ge c>0$. Khi ño, ta co

$$\begin{aligned}S_{b^2}&=2c^2+2a^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ca+\left(3-2\sqrt{2}\right)b(c+a)\\&\ge 2c^2+2b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)cb+\left(3-2\sqrt{2}\right)b(c+b)\\&=2\left(\sqrt{2}-1\right)^2b^2-4\left(\sqrt{2}-1\right)bc+2c^2\\&=2\left(\left(\sqrt{2}-1\right)b-c\right)^2\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{c^2}&=2a^2+2b^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ab+\left(3-2\sqrt{2}\right)c(a+b)\\&\ge 4ab+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)ab+\left(3-2\sqrt{2}\right)c(a+b)\\&=\left(5-2\sqrt{2}\right)ab+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(3-2\sqrt{2}\right)c(a+b)\\&\ge\left(5-2\sqrt{2}\right)c^2+\left(1-2\sqrt{2}\right)c^2+2\left(3-2\sqrt{2}\right)c^2\\&=\left(6-4\sqrt{2}\right)c^2+2\left(3-2\sqrt{2}\right)c^2\\&=4\left(\sqrt{2}-1\right)^2c^2\\&\ge 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{a^2}+S_{b^2}&=\left(\sqrt{2}-1\right)^2(a^2+b^2)+2\left(\sqrt{2}-1\right)ab-4\left(\sqrt{2}-1\right)c(a+b)+4c^2\\&=\left(\sqrt{2}-1\right)^2(a+b)^2-4\left(\sqrt{2}-1\right)c(a+b)+4c^2\\&=\left(\left(\sqrt{2}-1\right)(a+b)-2c\right)^2\\&\ge 0\end{aligned}$$

Do ño

$$S_{a^2}(b^2-c^2)^2+S_{b^2}(c^2-a^2)^2+S_{c^2}(a^2-b^2)^2\ge(S_{a^2}+S_{b^2})(b^2-c^2)^2\ge 0$$

$\Rightarrow$ (*) ñung.

Vay $k_{\max}=2\sqrt{2}+1$.

## Bai toan 83. (Vo Quoc Ba Can)

Cho tam giac $ABC$. Chöng minh rang

$$\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}.\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}+\frac{\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\left(1+\cos\frac{B}{2}\right)}{\sin\frac{B}{2}.\left(1+\sin\frac{B}{2}\right)}+\frac{\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\left(1+\cos\frac{C}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}.\left(1+\sin\frac{C}{2}\right)}\ge 2+\sqrt{3}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\frac{\left(\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right)^2}{\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\le\left(\frac{\sin\frac{A}{2}+1-\sin\frac{A}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

Töông tö, ta co

$$\sin\frac{B}{2}\left(1-\sin\frac{B}{2}\right)\le\frac{1}{4}$$

$$\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\le\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\le$$

$$\le\frac{1}{4}.\sum_{cyc}\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}.\left(3+\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}+\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}+\frac{1}{2}.\sum_{cyc}\sin A\right)$$

Chu yı raıng $\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\le\frac{3}{2},\sum_{cyc}\cos\frac{A}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2},\sum_{cyc}\sin A\le\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)\le\frac{1}{4}.\left(3+\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

$$=\frac{9\left(2+\sqrt{3}\right)}{16}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\frac{16}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$\Rightarrow\sum_{cyc}\frac{\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}\ge\frac{16\left(\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right)^2}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{16\left(\sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\right)^2}{9\left(2+\sqrt{3}\right)}\ge 2+\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)\left(1+\cos\frac{A}{2}\right)\geq \frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}+\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\right)\geq -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Do $\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}\leq\frac{3}{2}$ neın

$$-\sum_{cyc}\sin\frac{A}{2}+\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\right)\geq -\frac{3}{2}+\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\right)$$

Do ñoı, ta chæ caın chöıng minh

$$\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\right)\geq\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Xeıt haım soı $f(x)=\cos x-\frac{1}{2}.\sin 2x+x-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}$ vôıi $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Ta coı $f^{/}(x)=-\sin x+1-\cos 2x=\sin x.(2\sin x-1)$, $f^{/}(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}=x_0$

Qua $x_0$ thì $f^{/}(x)$ ñoıi daıu töı aım sang döông neın

$$f(x)\geq f\left(\frac{\pi}{6}\right)=0\ \ \forall x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Do $\frac{A}{2},\frac{B}{2},\frac{C}{2}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ neın

$$f\left(\frac{A}{2}\right)\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\geq 0$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\geq\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Töông töı, ta coı

$$\cos\frac{B}{2}-\frac{1}{2}.\sin B \ge \left(\frac{\pi}{6}-\frac{B}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$\cos\frac{C}{2}-\frac{1}{2}.\sin C \ge \left(\frac{\pi}{6}-\frac{C}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

Do ño

$$\sum_{cyc}\left(\cos\frac{A}{2}-\frac{1}{2}.\sin A\right)\ge \sum_{cyc}\left(\left(\frac{\pi}{6}-\frac{A}{2}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $A=B=C=\frac{\pi}{3}$.

## Bai toan 84.

Cho $a,b,c>0$ thoa $a+b+c=1$. Chöng minh rang

$$\left(\frac{1}{a}-2\right)^2+\left(\frac{1}{b}-2\right)^2+\left(\frac{1}{c}-2\right)^2\ge \frac{8(a^2+b^2+c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

*Lôi giai.*

Ñat $x=a^2+b^2+c^2$. Khi ño, de thay $\frac{1}{3}\le x<1$. Do ño

$$(x-1)(3x-1)\le 0$$
$$\Rightarrow 4x-1\ge 3x^2$$

Ta lai co

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\ge abc(a+b+c)=abc$$

Do ño

$$(4x-1)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)\ge 3abcx^2$$

Mat khac, ta lai co

$$4x-1=(b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2$$

Ap dung bat ñang thöc Chebyshev, ta co

$$3((b+c-a)^2b^2c^2+(c+a-b)^2c^2a^2+(a+b-c)^2a^2b^2)\ge$$

$$\geq ((b+c-a)^2+(c+a-b)^2+(a+b-c)^2)(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)$$

Do ño, ta co

$$((b+c-a)^2b^2c^2+(c+a-b)^2c^2a^2+(a+b-c)^2a^2b^2)\geq abc(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow ((1-2a)^2b^2c^2+(1-2b)^2c^2a^2+(1-2c)^2a^2b^2)\geq abc(a^2+b^2+c^2)$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$$
$$\Leftrightarrow (1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$$

Do ño

$$((1-2a)^2b^2c^2+(1-2b)^2c^2a^2+(1-2c)^2a^2b^2)(1-a)(1-b)(1-c)\geq$$
$$\geq 8a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2)$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}-2\right)^2+\left(\frac{1}{b}-2\right)^2+\left(\frac{1}{c}-2\right)^2\geq \frac{8(a^2+b^2+c^2)^2}{(1-a)(1-b)(1-c)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$.

## Bai toan 85. (Vo Quoc Ba Can)

Chöng minh rang vôi moi so döông $a,b,c$ ta ñeu co

$$3(a^3+b^3+c^3)-\frac{24(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c}+36\geq ab+bc+ca+\sum_{cyc}ab(a+b)$$

*Lôi giai.*

Tröôc het xin ñöôc nhac lai khong chöng minh ket qua quen thuoc sau

Xet ba day $(a_n),(b_n),(c_n)$ ñöôc xac ñònh bôi

$$a_0=a,\ b_0=b,\ c_0=c$$
$$c_{2n+1}=c_{2n},\ a_{2n+1}=b_{2n+1}=\frac{a_{2n}+b_{2n}}{2},\forall n\in N$$
$$a_{2n+2}=b_{2n+1},\ b_{2n+2}=c_{2n+2}=\frac{a_{2n+1}+c_{2n+1}}{2},\forall n\in N$$

Khi ño, ta co

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = \frac{a+b+c}{3} = t$$

Trôi lai bai toan cua ta

Ñat

$$f(a,b,c) = 3(a^3+b^3+c^3) - \frac{24(a^2+b^2+c^2)}{a+b+c} - ab - bc - ca - \sum_{cyc} ab(a+b) + 36$$

Ta se chöng minh

$$f(a,b,c) \ge \min\left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c)\right\}$$

That vay, gia sö ngöôc lai $f(a,b,c) < \min\left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c)\right\}$. Khi ño, ta co

$$\begin{cases} f(a,b,c) < f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \\ f(a,b,c) < f(0, a+b, c) \end{cases}$$

Ta co

$$f(a,b,c) < f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right)$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{9(a+b)}{4} - \frac{12}{a+b+c} + \frac{a+b+1}{4} - \frac{c}{2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow 10a + 10b - 2c + 1 - \frac{48}{a+b+c} < 0 \qquad (1)$$

$$f(a,b,c) < f(0, a+b, c)$$

$$\Leftrightarrow ab\left(-10a - 10b + 2c - 1 + \frac{48}{a+b+c}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow 10a + 10b - 2c + 1 - \frac{48}{a+b+c} > 0 \qquad (2)$$

Tö (1) va (2), ta suy ra mau thuan. Vay ta phai co

$$f(a,b,c) \ge \min\left\{ f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right), f(0, a+b, c)\right\}$$

Tiep theo, ta se chöng minh

$$\min\left\{f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right), f(0,a+b,c)\right\}\ge 0$$

Tröôc het, ta chöng minh

$$f(0,a+b,c)\ge 0 \qquad (3)$$

Bang lap luan töông tö nhö tren, ta co

$$f(0,a+b,c)\ge \min\left\{f\left(0,\frac{a+b+c}{2},\frac{a+b+c}{2}\right), f(0,0,a+b+c)\right\}$$

Ta lai co

$$f\left(0,\frac{a+b+c}{2},\frac{a+b+c}{2}\right)=4\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^3-\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2-24\left(\frac{a+b+c}{2}\right)+36\ge 0$$

$$f(0,0,a+b+c)=6((a+b+c)^3-4(a+b+c)+6)\ge 0$$

Do ño

$$f(0,a+b,c)\ge 0$$

Vay (3) ñung.

Bay giô, ta se chöng minh

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\ge 0 \qquad (4)$$

Tö (3) va ket qua tren, ta suy ra ñöôc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right) &= f(a_1,b_1,c_1)\\ &\ge \min\{0, f(a_2,b_2,c_2)\}\\ &\ge \dots\\ &\ge \min\{0, f(a_n,b_n,c_n)\}\ \ \forall n\in N \end{aligned}$$

Do $f(a,b,c)$ lien tuc nen

$$f\left(\frac{a+b}{2},\frac{a+b}{2},c\right)\ge \min\left\{0,\lim_{n\to\infty} f(a_n,b_n,c_n)\right\}=\min\{0, f(t,t,t)\}$$

Trong ñoi $t = \dfrac{a+b+c}{3}$.

Ta lai coi

$$f(t,t,t) = 3t^3 - 3t^2 - 24t + 36 = 3(t-2)^2(t+3) \ge 0$$

Do ñoi

$$f\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}, c\right) \ge 0$$

Vay (4) ñung.

Töi ñay, ta suy ra ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a = b = c = 2$.

Bai toan 86.

Cho $a,b,c > 0$. Chöng minh rang

$$2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 \ge \left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2$$

*Lôi giai.*

* Cach 1.

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta coi

$$\left(\sqrt{\frac{a}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \le 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

Do ñoi, ñei chöng minh bat ñang thöc ñai cho, ta chæ can chöng minh

$$2\left(\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}\right) + 3 \ge 3\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3 + b^3 + c^3) + 3abc \ge 3(a^2b + b^2c + c^2a)$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta coi

$$a^3 + ab^2 \ge 2a^2b$$

$$b^3 + bc^2 \ge 2b^2c$$

$$c^2 + ca^2 \ge 2c^2a$$

$$\Rightarrow a^3+b^3+c^3+ab^2+bc^2+ca^2 \ge 2(a^2b+b^2c+c^2a) \qquad (1)$$

Mat khac, theo bat ñang thöc Schur thì

$$a^3+b^3+c^3+3abc \ge a^2b+b^2c+c^2a+ab^2+bc^2+ca^2 \qquad (2)$$

Töø (1) va (2), ta suy ra ñöôc

$$2(a^3+b^3+c^3)+ab^2+bc^2+ca^2+3abc \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)+ab^2+bc^2+ca^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a^3+b^3+c^3)+3abc \ge 3(a^2b+b^2c+c^2a)$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

* Cach 2.

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$2.\frac{a^2}{bc}+\frac{c^2}{ab}+3 \ge 6\sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$2.\frac{b^2}{ca}+\frac{a^2}{bc}+3 \ge 6\sqrt{\frac{b}{c}}$$

$$2.\frac{c^2}{ab}+\frac{b^2}{ca}+3 \ge 6\sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)+9 \ge 6\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)+3 \ge 2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right) \qquad (3)$$

Lai ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$2.\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca} \ge 3.\frac{a}{c}$$

$$2.\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab} \ge 3.\frac{b}{a}$$

$$2.\frac{c^2}{ab}+\frac{a^2}{bc} \ge 3.\frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\ge 3\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\ge \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a} \qquad (4)$$

Tö (3) va (4), ta suy ra ñöôc

$$2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)+3\ge \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}+2\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{c}}+\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)+3\ge \left(\sqrt{\frac{a}{c}}+\sqrt{\frac{c}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va cha khi $a=b=c.$

Bai toan 87. (Pham Kim Hung)

Cho $a,b,c$ la ñoi dai ba canh cua mot tam giac. Chöng minh rang

$$2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\ge a+b+c+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}$$

*Lôi giai.*

Ta co 2 Bo ñe sau

Bo ñe 1. (IMO 1983)

$a,b,c$ la ñoi dai ba canh cua mot tam giac. Khi ño, ta co

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

*Chöng minh.*

Ta co $a,b,c$ la ñoi dai ba canh cua mot tam giac nen ton tai cac so döông $x,y,z$

sao cho $a=y+z, b=z+x, c=x+y.$ Khi ño, ta co

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$
$$\Leftrightarrow a^3c+c^3b+b^3a\ge a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$\Leftrightarrow x^3y+y^3z+z^3x\ge x^2yz+xy^2z+xyz^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{z}+\frac{z^2}{y}+\frac{y^2}{x} \ge x+y+z$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2}{x}+\frac{(y-z)^2}{y}+\frac{(z-x)^2}{z} \ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

Boå ñeà 1 ñöôïc chöùng minh hoaøn toaøn.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $x=y=z \Leftrightarrow a=b=c.$

**Boå ñeà 2.**

$a,b,c$ laø ñoä daøi ba caïnh cuûa moät tam giaùc. Khi ñoù, ta coù

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$$

*Chöùng minh.*

Ta coù

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$$
$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-3\right) \ge 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}-3\right)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(5a-5b+3c)(a-b)^2 \ge 0$$

Ñaët $S_a=5b-5c+3a, S_b=5c-5a+3b, S_c=5a-5b+3c$.

Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

**+ Tröôøng hôïp 1.** $a \le b \le c$. Khi ñoù, ta coù $S_b \ge 0$ vaø

$$S_a+S_b=8b-2a>0 \text{ (do } b \ge a)$$
$$S_c+S_b=8c-2b>0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2+S_a(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+S_b)(b-c)^2+(S_c+S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2. $a \ge b \ge c$. Khi ñoù ta coù $S_a, S_c \ge 0$. Do ñoù neáu $S_b \ge 0$ thì ta coù ngay ñpcm, vì vaäy ta chæ caàn xeùt tröôøng hôïp $S_b \le 0$ laø ñuû.

+ Tröôøng hôïp 2.1. $a+\left(\sqrt{3}-1\right)c \le \sqrt{3}b \Leftrightarrow a-c \le \sqrt{3}(b-c)$

Ta coù

$$S_a + 3S_b = 14b + 10c - 12a \ge 12(b+c-a) > 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 3S_b)(b-c)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2.2. $a+\left(\sqrt{3}-1\right)c \ge \sqrt{3}b \Leftrightarrow a-b \ge \left(\sqrt{3}-1\right)(b-c)$

+ Tröôøng hôïp 2.2.1. $a \ge \dfrac{3b}{2}$

Ta coù

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \ge 8(b+c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a > b + 13(a-b) - 5a = 8\left(a - \frac{3b}{2}\right) \ge 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2 + S_a(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + 2S_b)(b-c)^2 + (S_c + 2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröôøng hôïp 2.2.2. $a \le \dfrac{3b}{2}$

+ Tröôøng hôïp 2.2.2.1. $a + c \ge 2b \Rightarrow c \ge \dfrac{a}{3}$

Ta coù

$$S_a + 2S_b = 11b + 5c - 7a \ge 8(b+c) - 7a > 0$$

$$S_c + 2S_b = b + 13c - 5a \ge \frac{2a}{3} + 13.\frac{a}{3} - 5a = 0$$

Do ñoù

$$S_a(b-c)^2+S_a(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

+ Tröông hôp 2.2.2.2. $a+c \le 2b \Leftrightarrow a-c \le 2(b-c)$

Ta co

$$S_a+4S_b+\left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c=(5a-5b+3c)\left(\sqrt{3}-1\right)^2+17b+15c-17a$$

Do $a+\left(\sqrt{3}-1\right)c \ge \sqrt{3}b$ nen $b \le \dfrac{a}{\sqrt{3}}+\dfrac{\left(\sqrt{3}-1\right)c}{\sqrt{3}}$

Suy ra

$$\begin{aligned}5a-5b+3c &\ge 5a-\frac{5a}{\sqrt{3}}-\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)c}{\sqrt{3}}+3c\\ &=\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)a}{\sqrt{3}}+\frac{\left(5-2\sqrt{3}\right)c}{\sqrt{3}}\\ &>\frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)a}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Do ño

$$\begin{aligned}S_a+4S_b+\left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c &> \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}}+17b+15c-17a\\ &\ge \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}}+16\left(b+c\right)-17a\\ &> \frac{5\left(\sqrt{3}-1\right)^3 a}{\sqrt{3}}-a>0\end{aligned}$$

Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge \left(S_a+4S_b+\left(\sqrt{3}-1\right)^2 S_c\right)(b-c)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Bo ñe 2 ñöôc chöng minh hoan toan.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

Trôû laïi baøi toaùn cuûa ta

Theo keát quaû Boå ñeà 2, ta coù

$$3\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3$$

$$\Rightarrow 3(a+b+c)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\geq 2(a+b+c)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right)+3(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2\left(\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)+2(a+b+c)$$

Maët khaùc, theo Boå ñeà 1 thì

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

Do ñoù

$$4\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\geq 3\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)+\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}$$

$$\geq 2\left(\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)+2(a+b+c)$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\right)\geq a+b+c+\frac{a^2}{c}+\frac{c^2}{b}+\frac{b^2}{a} \text{ (ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

## Baøi toaùn 88. (Voõ Quoác Baù Caån)

Cho 2 soá khoâng aâm $a,b$. Chöùng minh raèng

$$a(a-b)(a-1)+b(b-a)(b-1)+(1-a)(1-b)\geq 0$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1)\geq 0$$

Khoâng maát tính toång quaùt, ta coù theå giaû söû $a\geq b\geq 0$.

Co 3 tröông hôp xay ra

+ Tröông hôp 1. $a \ge b \ge 1.$ Khi ño, hien nhien ta co

$$(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1) \ge 0$$

+ Tröông hôp 2. $1 \ge a \ge b \ge 0.$

+ Tröông hôp 2.1. $a+b \ge 1.$ Khi ño, hien nhien ta co

$$(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1) \ge 0$$

+ Tröông hôp 2.2. $1 \ge a+b \ge 0.$ Khi ño, ta co

$$\begin{aligned}(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1) &= (a-b)^2(a+b-1)+1-a-b+ab \\ &= (1-a-b)(1-(a-b)^2)+ab \\ &\ge 0 \ \text{(do } 1 \ge a \ge b \ge 0, a+b \le 1\text{)}\end{aligned}$$

+ Tröông hôp 3. $a \ge 1 \ge b \ge 0.$

Xet ham so $f(a)=(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1)$ vôi $a \ge 1.$

Ta co

$$f'(a)=3a^2-2a-1-b^2+3b-2ab$$
$$f''(a)=6a-2-2b>0$$

$\Rightarrow f'(a)$ la ham ñong bien tren $[1,+\infty)$.

$\Rightarrow f'(a) \ge f'(1)=b(1-b) \ge 0 \quad \forall a \ge 1$

$\Rightarrow f(a)$ la ham ñong bien tren $[1,+\infty)$.

$\Rightarrow f(a) \ge f(1)=b(1-b)^2 \ge 0 \quad \forall a \ge 1.$

Do ño

$$(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1) \ge 0$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$(a-b)^2(a+b-1)+(a-1)(b-1) \ge 0 \ \text{(ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b)=(1,0),(1,1).$

## Bai toan 89. (Vo Quoc Ba Can)

Cho cac so döông $a,b,c.$ Chöng minh rang

$$2(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)\ge(1+abc)(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$2^3(1+a^3)^3(1+b^3)^3(1+c^3)^3\ge(1+abc)^3(1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\begin{aligned}(1+a^3)(1+b^3)(1+c^3)&=1+(a^3+b^3+c^3)+(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^3b^3c^3\\&\ge1+3abc+3a^2b^2c^2+a^3b^3c^3\\&=(1+abc)^3\end{aligned}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$2^3(1+a^3)^2(1+b^3)^2(1+c^3)^2\ge(1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3$$

Ap dung bat ñang thöc Chebyshev, ta co

$$\begin{aligned}2(1+a^3)^2&=2(1+a^3)(1+a^3)\\&\ge(1+a^3)(1+a^2)(1+a)\\&=(1+a^2)((1+a^3)(1+a)-(1+a^2)^2)+(1+a^2)^3\\&=(1+a^2)a(a-1)^2+(1+a^2)^3\\&\ge(1+a^2)^3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2(1+a^3)^2\ge(1+a^2)^3>0$$

Töông tö, ta co

$$2(1+b^3)^2\ge(1+b^2)^3>0$$
$$2(1+c^3)^2\ge(1+c^2)^3>0$$

Do ño

$$2^3(1+a^3)^2(1+b^3)^2(1+c^3)^2\ge(1+a^2)^3(1+b^2)^3(1+c^2)^3$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1.$

## Bai toan 90. (Vo Quoc Ba Can)

Cho cac so khong am $a,b,c$ thoa $a+b+c=1$. Tìm hang so $k>0$ lôn nhat sao cho bat ñang thöc sau ñung

$$\frac{a^2+kb}{b+c}+\frac{b^2+kc}{c+a}+\frac{c^2+ka}{a+b}\ge\frac{3k+1}{2}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc ña cho töông ñöông vôi

$$\left(\sum_{cyc}\frac{2a^2}{b+c}-1\right)+k\left(\sum_{cyc}\frac{2a}{a+b}-3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(a+b+c)}{(a+c)(b+c)}-\frac{k(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{3k(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{3(a-b)^2}{(a+c)(b+c)}-\frac{k\sum_{cyc}(a-b)^3}{(a+b)(b+c)(c+a)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2((3-k)a+(3+k)b)\ge 0 \qquad (*)$$

Khong mat tính tong quat, ta co co the gia sö $a=\min\{a,b,c\}$.

Ñat $b=a+x, c=a+y\ (x,y\ge 0)$. Khi ño, ta co

$$(*)\Leftrightarrow x^2((3-k)a+(3+k)(a+x))+(x-y)^2((3-k)(a+x)+(3+k)(a+y))+$$
$$+y^2((3-k)(a+y)+(3+k)a)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 12(x^2-xy+y^2)a+6x^3+3(k-1)x^2y-3(k+1)xy^2+6y^3\ge 0\ \ \forall a,x,y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^3+(k-1)x^2y-(k+1)xy^2+2y^3\ge 0\ \ \forall x,y\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+(k-1)t^2-(k+1)t+2\ge 0\ \ \forall t\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-t^2-t+2\ge kt(1-t)\ \ \forall t\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3-t^2-t+2\ge kt(1-t)\ \ \forall t\in(0,1)$$

$$\Leftrightarrow k\le\frac{2t^3-t^2-t+2}{t(1-t)}=f(t)\ \ \forall t\in(0,1)$$

Ta co

$$f^{/}(t) = -\frac{2(t^4 - 2t^3 + t^2 - 2t + 1)}{t^2(1-t)^2}$$

$$f^{/}(t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = \dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \text{ (nhan)} \\ t_2 = \dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2} \text{ (loai)} \end{array}\right.$$

Qua $t_1$ thì $f^{/}(t)$ ñoi dau tö am sang döông nen

$$f(t) \ge f\left(\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right) = -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1} \quad \forall t \in (0,1)$$

Do ño

$$k \le -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}$$

Qua cac lap luan tren, ta suy ra ñöôc

$$k_{\max} = -\sqrt{2} - 1 + \frac{4\sqrt{2} - 2\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}.$$

## Bai toan 91. (Tran Tuan Anh)

Cho cac so khong am $a,b,c$ thoa $a+b+c=1$. Tìm gia trò lôn nhat va gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P(a,b,c) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$

*Lôi giai.*

### + Cach 1.

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $b$ la so hang nam giöa $a$ va $c$.

Ñe tìm gia trò lôn nhat va gia trò nho nhat cua $P$, tröôc het ta se tìm gia trò nho nhat cua ham so $f(b) = (1-b)b^3 - b(1-b)^3 = -2b^3 + 3b^2 - b$ vôi $0 \le b \le 1$.

Ta co

$$f'(b) = -(6b^2 - 6b + 1)$$

$$f'(b) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \\ b_2 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \end{array}\right.$$

Bang bien thien cua $f(b)$

| $b$ | $0$ | | $\frac{3-\sqrt{3}}{6}$ | | $\frac{3+\sqrt{3}}{6}$ | | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(b)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(b)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Can cöi vao bang bien thien, ta suy ra ñöôc

$$\min_{0\le b\le 1} f(b) = \min\left\{ f(1), f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)\right\}$$

Ta lai coi $f(1) = 0,\ f\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{18}$. Do ñoi

$$\min_{0\le b\le 1} f(b) = f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Tiep theo, ta sei chöng minh

$$P(a+c,b,0) \le P(a,b,c) \le P(a+c,0,b)$$

Coi 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $1 \ge a \ge b \ge c \ge 0.$

Xet ham soi $g(a) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c)$

Ta coi

$$g'(a) = (b-c)^3 - 3b(a-c)^2 + 3c(a-b)^2 + 3b(a+c)^2 - b^3$$
$$= 12abc - b^3 + (b-c)^3 + 3c(a-b)^2$$

$$\geq 12b^2c - b^3 + (b-c)^3$$
$$= 9b^2c + 3bc^2 - c^3$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow g(a)$ la ham ñoing bien.

$$\Rightarrow g(a) \geq g(b) = b(b+c)^3 - b^3(b+c) = bc(b+c)(2b+c) \geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \geq b^3(a+c) - b(a+c)^3$$
$$\Rightarrow P(a,b,c) \geq P(a+c,b,0)$$

Xet tiep ham so $h(a) = b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3$

Ta co

$$h'(a) = 3b(a+c)^2 - b^3 + 3b(a-c)^2 - (b-c)^3 - 3c(a-b)^2 \geq 0$$

$\Rightarrow h(a)$ la ham ñoing bien.

$$\Rightarrow h(a) \geq h(b) = b(b+c)^3 - b^3(b+c) = bc(b+c)(2b+c) \geq 0$$
$$\Rightarrow 3b(a+c)^2 - b^3 + 3b(a-c)^2 - (b-c)^3 - 3c(a-b)^2 \geq 0$$
$$\Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) \geq a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$
$$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$$

Vay trong trööng hôp nay, ta co

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

* Trööng hôp 2. $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0.$

Xet ham so $k(c) = a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c)$

Ta co

$$k'(c) = 3b(c-a)^2 + 3b(c+a)^2 - 3a(c-b)^2 - b^3 - (b-a)^3 \geq 0$$

$\Rightarrow k(c)$ la ham ñoing bien.

$$\Rightarrow k(c) \geq k(b) = b(b+a)^3 - b^3(b+a) = ab(a+b)(a+2b) \geq 0$$
$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 + b(a+c)^3 - b^3(a+c) \geq 0$$
$$\Rightarrow a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 \geq b^3(a+c) - b(a+c)^3$$
$$\Rightarrow P(a,b,c) \geq P(a+c,b,0)$$

Xet tiep ham so $m(c) = b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3$

Ta co

$$m'(c) = 3b(c+a)^2 + 3a(c-b)^2 - 3b(c-a)^2 - b^3 + (b-a)^3$$
$$= 12abc + 3a(c-b)^2 - b^3 + (b-a)^3$$
$$\geq 12ab^2 - b^3 + (b-a)^3$$
$$= 3a^2b + 9ab^2 - a^3$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow m(c)$ la ham ñong bien.

$$\Rightarrow m(c) \geq m(b) = b(a+b)^3 - b^3(a+b) = ab(a+b)(a+2b) \geq 0$$
$$\Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) - a(b-c)^3 - b(c-a)^3 - c(a-b)^3 \geq 0$$
$$\Rightarrow b(a+c)^3 - b^3(a+c) \geq a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$$
$$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$$

Vay trong tröông hôp nay, ta cung co

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Mat khac, ta lai co

$$P(a+c,b,0) = b^3(a+c) - (a+c)^3 b = b^3(1-b) - (1-b)^3 b = f(b)$$

$$P(a+c,0,b) = (a+c)^3 b - b^3(a+c) = (1-b)^3 b - b^3(1-b) = -f(b)$$

Do ño, theo ket qua tren, ta co

$$P(a+c,b,0) \geq -\frac{\sqrt{3}}{18}$$
$$P(a+c,0,b) \leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Nhö vay, ta co

$$P(a,b,c) \geq -\frac{\sqrt{3}}{18} \quad (1)$$
$$P(a,b,c) \leq \frac{\sqrt{3}}{18} \quad (2)$$

Ñaing thöic ôi (1) xaiy ra chaing hain khi $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}, c=0.$

Ñaing thöic ôi (2) xaiy ra chaing hain khi $a=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6}, b=0, c=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}.$

Vaiy

$$\max P(a,b,c)=\frac{\sqrt{3}}{18}$$
$$\min P(a,b,c)=-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

+ Caich 2.

Khoing mat tính toing quait, ta coi thei giai söi $b$ lai soi haing naim giöia $a$ vai $c$.

Ta coi

$$\begin{aligned}P(a,b,c)&=a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3\\&=ab^3+bc^3+ca^3-a^3b-b^3c-c^3a\\&=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\\&=(a-b)(b-c)(c-a)\end{aligned}$$

Coi 2 tröôing hôip xaiy ra

* Tröôing hôip 1. $1\ge a\ge b\ge c\ge 0$. Khi ñoi, ta coi $P(a,b,c)\le 0$.

Aip duing bait ñaing thöic AM-GM, ta coi

$$\begin{aligned}P(a,b,c)&=-(a-b)(b-c)(a-c)\\&=-4.\frac{a-b}{2}.\frac{b-c}{\sqrt{3}-1}.\frac{a-c}{\sqrt{3}+1}\\&\ge -4\left(\frac{\dfrac{a-b}{2}+\dfrac{b-c}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{a-c}{\sqrt{3}+1}}{3}\right)^3\\&=-4\left(\frac{\dfrac{(a+b)\sqrt{3}}{2}-c\sqrt{3}}{3}\right)^3\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{18}.(3c-1)^3$$
$$\geq -\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ \dfrac{a-b}{2} = \dfrac{b-c}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{a-c}{\sqrt{3}+1} \geq 0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \\ b = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \\ c=0 \end{cases}$

* Tröôøng hôïp 2. $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0$. Khi ñoi, dei thaiy $P(a,b,c) \geq 0$.

Aip duing bait ñaing thöic AM-GM, ta coi

$$P(a,b,c) = (c-b)(b-a)(c-a)$$
$$= 4.\frac{c-b}{2}.\frac{b-a}{\sqrt{3}-1}.\frac{c-a}{\sqrt{3}+1}$$
$$\leq 4\left(\frac{\dfrac{c-b}{2}+\dfrac{b-a}{\sqrt{3}-1}+\dfrac{c-a}{\sqrt{3}+1}}{3}\right)^3$$
$$= 4\left(\frac{\dfrac{(c+b)\sqrt{3}}{2}-a\sqrt{3}}{3}\right)^3$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{18}.(1-3a)^3$$
$$\leq \frac{\sqrt{3}}{18}$$

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $\begin{cases} a+b+c=1 \\ \dfrac{c-b}{2}=\dfrac{b-a}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{c-a}{\sqrt{3}+1}\geq 0 \\ a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{3+\sqrt{3}}{6} \\ b=\dfrac{3-\sqrt{3}}{6} \\ a=0 \end{cases}$

Töi caic chöing minh trein, ta suy ra ñöôic

$$\max P(a,b,c)=\frac{\sqrt{3}}{18}$$
$$\min P(a,b,c)=-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

Bai toain 92. (Phaim Vain Thuain)

Cho caic soi khoing aim $a,b,c$ thoia $a+b+c=1$. Tuiy theo giai trò cuia $n\in N,$ tìm giai trò lôin nhat vai giai trò nhoi nhat cuia bieiu thöic

$$P(a,b,c)=a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n$$

*Lôi giai.*

$+\ n=0\Rightarrow P(a,b,c)=1$
$+\ n=1\Rightarrow P(a,b,c)=0$

+ Xeit $n\geq 2$

a) $n$ lei $\Rightarrow$ $n\geq 3$.

Ta sei chöing minh

$$P(a+c,b,0)\leq P(a,b,c)\leq P(a+c,0,b)$$

Coi 2 tröôing hôip xaiy ra

* Tröôing hôip 1. $1\geq a\geq b\geq c\geq 0$.

Xeit haim soi $g(a)=(a+c)^n b-(a+c)b^n-a(b-c)^n-b(c-a)^n-c(a-b)^n$

Ta coi

$$\begin{aligned} g'(a)&=nb(a+c)^{n-1}-b^n-(b-c)^n+nb(a-c)^{n-1}-nc(a-b)^{n-1} \\ &=nb(a+c)^{n-1}-b^n-(b-c)^n+n(b(a-c)^{n-1}-c(a-b)^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\geq nb(a+c)^{n-1} - b^n - (b-c)^n$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow g(a)$ la ham ñong bien.

$\Rightarrow g(a) \geq g(b) = (b+c)^n b - (b+c)b^n \geq 0$

$\Rightarrow (a+c)^n b - (a+c)b^n \geq a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$

$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$ (1)

Xet tiep ham so $h(a) = (a+c)^n b - (a+c)b^n + a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n$

Ta co

$$h^{/}(a) = nb(a+c)^{n-1} - b^n + (b-c)^n - nb(a-c)^{n-1} + nc(a-b)^{n-1}$$
$$= nb((a+c)^{n-1} - (a-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n + nc(a-b)^{n-1}$$
$$\geq nb((b+c)^{n-1} - (b-c)^{n-1}) - b^n + (b-c)^n$$
$$= 2nb\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} C_{n-1}^{2l+1} b^{n-2l-2} c^{2l+1} - \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l+1} b^{n-2l-1} c^{2l+1} + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} c^{2l}$$
$$= \sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}} b^{n-2l-1} c^{2l+1} (2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1}) + \sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}} C_n^{2l} b^{n-2l} c^{2l} - c^n$$
$$\geq 0 \ \text{(do } 2nC_{n-1}^{2l+1} - C_n^{2l+1} \geq 0 \ \forall l < n)$$

$\Rightarrow h(a)$ la ham ñong bien.

$\Rightarrow h(a) \geq h(b) = (b+c)^n b - (b+c)b^n \geq 0$

$\Rightarrow a(b-c)^n + b(c-a)^n + c(a-b)^n \geq (a+c)b^n - (a+c)^n b$

$\Rightarrow P(a,b,c) \geq P(a+c,b,0)$ (2)

Tö (1) va (2), ta suy ra trong tröông hôp nay, ta co

$$P(a+c,b,0) \leq P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

* Tröông hôp 2. $1 \geq c \geq b \geq a \geq 0$.

Xet ham so $k(c) = (a+c)^n b - (a+c)b^n - a(b-c)^n - b(c-a)^n - c(a-b)^n$

Ta co

$$k^{/}(c) = nb(c+a)^{n-1} - b^n + na(c-b)^{n-1} - nb(c-a)^{n-1} + (b-a)^n$$
$$= nb((c+a)^{n-1} - (c-a)^{n-1}) - b^n + (b-a)^n + na(c-b)^{n-1}$$

$$\geq nb((b+a)^{n-1}-(b-a)^{n-1})-b^n+(b-a)^n$$

$$=2nb\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}}C_{n-1}^{2l+1}b^{n-2l-2}a^{2l+1}-\sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2l+1}b^{n-2l-1}a^{2l+1}+\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2l}b^{n-2l}a^{2l}$$

$$=\sum_{l=0}^{\frac{n-3}{2}}b^{n-2l-1}a^{2l+1}(2nC_{n-1}^{2l+1}-C_n^{2l+1})+\sum_{l=1}^{\frac{n-1}{2}}C_n^{2l}b^{n-2l}a^{2l}-a^n$$

$\geq 0$ (do $2nC_{n-1}^{2l+1}-C_n^{2l+1}\geq 0\ \ \forall l<n$)

$\Rightarrow k(c)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow k(c)\geq k(b)=(b+a)^n b-(b+a)b^n\geq 0$$

$$\Rightarrow (a+c)^n b-(a+c)b^n\geq a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n$$

$$\Rightarrow P(a+c,0,b)\geq P(a,b,c) \qquad (3)$$

Xét tiếp hàm số $m(c)=(a+c)^n b-(a+c)b^n+a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n$

Ta có

$$m'(c)=nb(c+a)^{n-1}-b^n-na(c-b)^{n-1}+nb(c-a)^{n-1}-(b-a)^n$$
$$=(nb(c+a)^{n-1}-b^n-(b-a)^n)+n(b(c-a)^{n-1}-a(c-b)^{n-1})$$
$$\geq 0$$

$\Rightarrow m(c)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow m(c)\geq m(b)=(b+a)^n b-(b+a)b^n\geq 0$$

$$\Rightarrow a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n\geq -(a+c)^n b+(a+c)b^n$$

$$\Rightarrow P(a,b,c)\geq P(a+c,b,0) \qquad (4)$$

Từ (3) và (4), ta suy ra trong trường hợp này, ta cũng có

$$P(a+c,b,0)\leq P(a,b,c)\leq P(a+c,0,b)$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$P(a+c,b,0)\leq P(a,b,c)\leq P(a+c,0,b)$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^n-t}{(t+1)^{n+1}}$ với $t>0$.

Ta có

$$f'(t)=\frac{-t^n+nt^{n-1}+nt-1}{(t+1)^{n+2}}$$

$$f^{/}(t)=0 \Leftrightarrow -t^n+nt^{n-1}+nt-1=0$$

Dei thaiy neiu $t_0>0$ lai moit nghieim cuia phöông trình $f^{/}(t)=0$ thì $\dfrac{1}{t_0}$ cuing lai nghieim cuia phöông trình $f^{/}(t)=0$. Do ñoi, ta chæ cain tìm nghieim cuia phöông trình $f^{/}(t)=0$ trein $(0,1]$ lai ñui.

Xeit haim soi $\varphi(t)=-t^n+nt^{n-1}+nt-1$ vôii $t\in(0,1]$.

Ta coi

$$\varphi^{/}(t)=n(1-t^{n-1})+n(n-1)t^{n-2}>0 \;\; \forall t\in(0,1]$$

$\Rightarrow \varphi(t)$ lai haim ñoing biein trein $(0,1]$.

Ta laii coi $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=-1<0, \varphi(1)=2(n-1)>0$ nein toin taii duy nhait $t_1\in(0,1]$ sao cho $\varphi(t_1)=0$.

Do ñoi, phöông trình $f^{/}(t)=0$ chæ coi 2 nghieim phain bieit lai $t_1$ vai $\dfrac{1}{t_1}$.

Qua $t_1$ thì $f^{/}(t)$ ñoii daiu töi aim sang döông, qua $\dfrac{1}{t_1}$ thì $f^{/}(t)$ ñoii daiu töi döông sang aim nein

$$f(t)\le \max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t), f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\} \;\; \forall t>0$$

Ta laii coi neiu $b>0$ thì

$$P(a+c,0,b)=(a+c)^n b-(a+c)b^n=\frac{(a+c)^n b-(a+c)b^n}{(a+b+c)^{n+1}}=\frac{\left(\dfrac{a+c}{b}\right)^n-\left(\dfrac{a+c}{b}\right)}{\left(\dfrac{a+c}{b}+1\right)^{n+1}}$$

$$=f\left(\frac{a+c}{b}\right)$$

$$P(a+c,b,0)=-(a+c)^n b+(a+c)b^n$$

$$=-\frac{(a+c)^n b-(a+c)b^n}{(a+b+c)^{n+1}}$$

$$=-\frac{\left(\dfrac{a+c}{b}\right)^n-\left(\dfrac{a+c}{b}\right)}{\left(\dfrac{a+c}{b}+1\right)^{n+1}}$$

$$=-f\left(\frac{a+c}{b}\right)$$

Nein theo trein, ta coi

$$P(a+c,0,b)\le \max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t),\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}=\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

$$P(a+c,0,b)\ge -\max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t),\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}=-\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Ngoai ra, neiu $b=0$ thì ta coi $P(a+c,b,0)=P(a+c,0,b)=0$ nein ta luoin coi

$$P(a+c,0,b)\le \max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t),\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}=\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

$$P(a+c,0,b)\ge -\max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t),\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}=-\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Do ñoi, ta coi

$$-\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}\le P(a,b,c)\le \max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Dei thaiy raing ñaing thöc luoin xaiy ra nein ta coi

$$\min P(a,b,c)=-\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

$$\max P(a,b,c)=\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

b) $n$ chan $\Rightarrow n \geq 2.$

Khi ñoi, dei thay $\min P(a,b,c)=0$ vai $P(a,b,c)$ lai mot bieu thöc ñoi xöng vôi $a,b$

vai $c$ nein khoing mat tính toing quat, ta coi thei giai söi $1 \geq a \geq b \geq c \geq 0.$

Ta sei chöing minh

$$P(a,b,c) \leq P(a+c,0,b)$$

Xet ham soi $u(a)=(a+c)^n b-(a+c)b^n-a(b-c)^n-b(c-a)^n-c(a-b)^n$

Ta coi

$$\begin{aligned}u'(a) &= nb(a+c)^{n-1}-b^n-(b-c)^n+nb(a-c)^{n-1}-nc(a-b)^{n-1}\\ &= nb(a+c)^{n-1}-b^n-(b-c)^n+n(b(a-c)^{n-1}-c(a-b)^{n-1})\\ &\geq nb(a+c)^{n-1}-b^n-(b-c)^n\\ &\geq 0\end{aligned}$$

$\Rightarrow u(a)$ lai ham ñoing biein.

$$\Rightarrow u(a) \geq u(b)=(b+c)^n b-(b+c)b^n \geq 0$$

$$\Rightarrow (a+c)^n b-(a+c)b^n \geq a(b-c)^n+b(c-a)^n+c(a-b)^n$$

$$\Rightarrow P(a+c,0,b) \geq P(a,b,c)$$

Theo trein, ta lai coi

$$P(a+c,0,b) \leq \max\left\{\lim_{t\to 0^+} f(t),\, f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\} = \max\left\{0,\, f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Do ñoi

$$P(a,b,c) \leq \max\left\{0,\, f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Ngoai ra, ta cuing dei thay ñaing thöc luoin xay ra nein

$$\max P(a,b,c) = \max\left\{0,\, f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

Ket luain

$+\ n=0 \Rightarrow P(a,b,c)=1$

$+\ n=1 \Rightarrow P(a,b,c)=0$

$$+\ n \ge 2 \Rightarrow \max P(a,b,c) = \max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}0$$

$$*\ n \text{ le} \Rightarrow \min P(a,b,c) = -\max\left\{0,\ f\left(\frac{1}{t_1}\right)\right\}$$

$$*\ n \text{ chan} \Rightarrow \min P(a,b,c) =$$

trong ño $f(t) = \dfrac{t^n - t}{(t+1)^{n+1}}$ va $t_1$ la nghiem döông duy nhat thuoc $(0,1]$ cua phöông

trình $-t^n + nt^{n-1} + nt - 1 = 0.$

## Bai toan 93. (Vietnam TST 1996)

Cho cac so thöc $a,b,c$ bat ky. Chöng minh rang

$$F(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}.(a^4 + b^4 + c^4) \ge 0$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$F(a,b,c) - F\left(a, \frac{b+c}{2}, \frac{b+c}{2}\right) =$$

$$= (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - \frac{4}{7}.(a^4 + b^4 + c^4) -$$

$$-2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 - (b+c)^4 + \frac{4}{7}.\left(a^4 + 2\left(\frac{b+c}{2}\right)^4\right)$$

$$= (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2\left(a + \frac{b+c}{2}\right)^4 + \frac{4}{7}\left(\frac{(b+c)^4}{8} - b^4 - c^4\right)$$

$$= a(4b^3 + 4c^3 - (b+c)^3) + 3a^2(2b^2 + 2c^2 - (b+c)^2) + \frac{3}{7}.\left(b^4 + c^4 - \frac{(b+c)^4}{8}\right)$$

$$= 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + \frac{3}{56}.(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc)$$

$$= 3a(a+b+c)(b-c)^2 + \frac{3}{56}.(b-c)^2(7b^2 + 7c^2 + 10bc)$$

Soá haïng cuoái cuøng luoân luoân khoâng aâm. Neáu $a,b,c$ cuøng daáy thì baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh laø hieån nhieân. Neáu $a,b,c$ khoâng cuøng daáu thì phaûi coù ít nhaát moät trong ba soá $a,b,c$ cuøng daáu vôùi $a+b+c$. Khoâng maát tính toång quaùt, giaû söû ñoù laø $a$. Töø ñaúng thöùc treân ta suy ra $F(a,b,c)\ge F\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right)$. Nhö vaäy, ta chæ caàn chöùng minh

$$F(a,b,b)\ge 0\ \ \forall a,b\in \mathrm{R}$$

$$\Leftrightarrow 2(a+b)^4+(2b)^4-\frac{4}{7}.(a^4+2b^4)\ge 0$$

Neáu $b=0$ thì baát ñaúng thöùc laø hieån nhieân. Neáu $b\ne 0$, chia hai veá cuûa baát ñaúng thöùc cho $b^4$ roài ñaët $x=\frac{a}{b}$ thì ta ñöôïc baát ñaúng thöùc töông ñöông

$$2(x+1)^4+16-\frac{4}{7}.(x^4+2)\ge 0$$

Baát ñaúng thöùc cuoái cuøng coù theå chöùng minh nhö sau

Xeùt haøm soá $f(x)=2(x+1)^4+16-\frac{4}{7}.(x^4+2)$

Ta coù

$$f^{/}(x)=8(x+1)^3-\frac{16}{7}.x^3$$

$$f^{/}(x)=0\Leftrightarrow x+1=\sqrt[3]{\frac{2}{7}}.x\Leftrightarrow x=-2.9294.$$

$$f_{\min}=f(-2.9294)=0.4924>0$$

(Caùc phaàn tính toaùn cuoái ñöôïc tính vôùi ñoä chính xaùc tôùi 4 chöõ soá sau daáu phaåy. Do $f_{\min}$ tính ñöôïc laø $0.4924$ neân neáu tính caû sai soá tuyeät ñoái thì giaùtò chính xaùc cuûa $f_{\min}$ vaãn laø moät soá döông. Vì ñaây laø moät baát ñaúng thöùc raát chaët neân khoâng theå

tranh ñöôïc caùc tính tính toaùn vôùi soá leû treân ñaây. Chaúng haïn neáu thay $\frac{4}{7}$ baèng $\frac{16}{27}$

ñeå $x_{\min} = -3$ thì $f^*_{\min}$ coù giaù trò aâm! ÔÛ ñaây $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - \frac{4}{7}.(x^4+2)$.)

* Chuù yù.

Ta coù theå ñöa baøi toaùn veà chöùng minh $F(a,b,b) \geq 0 \ \forall a,b \in \mathbf{R}$ baèng caùch söû duïng

Boå ñeà sau

Boå ñeà. $\forall a,b,c \in \mathbf{R}$ thì toàn taïi caùc soá thöïc $x_0, y_0, x_1, y_1$ sao cho

$$p = a+b+c = 2x_0 + y_0 = 2x_1 + y_1$$
$$q = ab+bc+ca = x_0^2 + 2x_0y_0 = x_1^2 + 2x_1y_1$$
$$x_0^2y_0 \leq r = abc \leq x_1^2y_1$$

Ngoaøi ra, neáu $a,b,c \geq 0$ thì $x_0, x_1, y_1 \geq 0$. Trong ñoù

+ Neáu $p^2 \geq 4q$ thì $y_0 \leq 0$

+ Neáu $p^2 \leq 4q$ thì $y_0 \geq 0$

Baøi toaùn 94. (Phaïm Kim Huøng)

Cho caùc soá khoâng aâm $a,b,c$ thoûa $a+b+c=3$.Tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc

$$f(a,b,c) = a^k(b+c) + b^k(c+a) + c^k(a+b)$$

trong ñoù $k > 0$ laø haèng soá cho tröôùc.

*Lôøi giaûi.*

Khoâng maát tính toång quaùt, ta coù theå giaû söû $a \geq b \geq c \geq 0$.

Coù 3 tröôøng hôïp xaûy ra

* Tröôøng hôïp 1. $1 > k > 0$. Khi ñoù, aùp duïng baát ñaúng thöùc Holder, ta coù

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= a^k(b+c) + b^k(c+a) + c^k(a+b) \\ &= a^k(3-a) + b^k(3-b) + c^k(3-c) \\ &= 3(a^k+b^k+c^k) - (a^{k+1}+b^{k+1}+c^{k+1}) \\ &\leq 3.\frac{(a+b+c)^k}{3^{k-1}} - \frac{(a+b+c)^{k+1}}{3^k} = 6 \end{aligned}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c=1$.

* Tröôøng hôïp 2. $k>2$. Khi ñoù, ta seõ chöùng minh

$$f(a,b,c)\le f(a,b+c,0)$$
$$\Leftrightarrow a^k(b+c)+b^k(c+a)+c^k(a+b)\le a^k(b+c)+(b+c)^k a$$
$$\Leftrightarrow b^k(c+a)+c^k(a+b)\le (b+c)^k a$$
$$\Leftrightarrow ((b+c)^k-b^k-c^k)a\ge b^kc+bc^k$$

Do $k>2$ neân

$$\begin{aligned}(b+c)^k-b^k-c^k&=(b+c)^{k-1}(b+c)-b^k-c^k\\&\ge (b^{k-1}+c^{k-1})(b+c)-b^k-c^k\\&=b^{k-1}c+bc^{k-1}\end{aligned}$$
$$\Rightarrow ((b+c)^k-b^k-c^k)a\ge (b^{k-1}c+bc^{k-1})a\ge b^kc+bc^k \text{ (do } a\ge b\ge c\ge 0)$$
$$\Rightarrow f(a,b,c)\le f(a,b+c,0)$$

Tieáp theo, ta seõ tìm giaù trò lôùn nhaát cuûa bieåu thöùc

$$f(a,b,0)=a^kb+b^ka$$

trong ñoù $a,b\ge 0$ thoûa $a+b=3$.

Khoâng maát tính toång quaùt, ta coù theå giaû söû $a\ge b\ge 0\Rightarrow a>0$. Khi ñoù, ta coù

$$f(a,b,0)=a^kb+b^ka=3^{k+1}.\frac{a^kb+b^ka}{(a+b)^{k+1}}=3^{k+1}g(t)$$

trong ñoù $g(t)=\dfrac{t^k+t}{(t+1)^{k+1}}$ vaø $t=\dfrac{b}{a}\le 1$.

Ta coù

$$g'(t)=\frac{-t^k+kt^{k-1}-kt+1}{(t+1)^{k+2}}$$
$$g'(t)=0\Leftrightarrow -t^k+kt^{k-1}-kt+1=0 \qquad (*)$$

Deã thaáy 1 laø moät nghieäm cuûa phöông trình (*). Goïi $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m$ laø taát caû caùc nghieäm thuoäc $[0,1)$ neáu coù phöông trình (*). Khi ñoù, deã thaáy

$$g(t)\le \max\{g(1),g(\alpha_i)\}\ \ \forall t\in[0,1]$$

$$\Rightarrow f(a,b,0) \le 3^{k+1} \max\{g(1), g(\alpha_i)\}$$

Ngoai ra, dei thay ñang thöc luon xay ra.

* Tröông hôp 3. $2 \ge k \ge 1$.

Ñat $a+b=2t, a-b=2u \Rightarrow t \ge u \ge 0, t \ge c \ge 0$. Khi ño, ta co

$$f(a,b,c)=(t+u)^k(t-u+c)+(t-u)^k(t+u+c)+2c^k t = h(u)$$

Ta co

$$\begin{aligned} h'(u) &= k(t+u)^{k-1}(t-u+c)-(t+u)^k - k(t-u)^{k-1}(t+u+c)+(t-u)^k \\ &= (t+u)^{k-1}((k-1)t-(k+1)u+kc)-(t-u)^{k-1}((k-1)t+(k+1)u+kc) \end{aligned}$$

Neu $\left[\begin{array}{l} t=u \\ (k-1)t-(k+1)u+kc \le 0 \end{array}\right.$ thì ta co $h'(u) \le 0$.

Neu $\begin{cases} t>u \\ (k-1)t-(k+1)u+kc>0 \end{cases}$ thì do $2 \ge k \ge 1$ nen $(t+u)^{k-1} \le (t+u)(t-u)^{k-2}$. Do

ño, ta co

$$\begin{aligned} h'(u) &\le (t+u)(t-u)^{k-2}((k-1)t-(k+1)u+kc)- \\ &\qquad -(t-u)^{k-1}((k-1)t+(k+1)u+kc) \\ &= (t-u)^{k-2}((t+u)((k-1)t-(k+1)u+kc)-(t-u)((k-1)t+(k+1)u+kc)) \\ &= -2u(t-u)^{k-2}(2t-kc) \\ &\le 0 \end{aligned}$$

Tom lai, ta luon co $h'(u) \le 0 \Rightarrow h(u)$ la ham nghòch bien tren [0,+∞). Do ño

$$f(a,b,c)=h(u) \le h(0) = f(t,t,c)$$

Bay giô, ta se tìm gia trò lôn nhat cua bieu thöc

$$f(t,t,c)=2t^k(t+c)+2tc^k$$

trong ño $t \ge c \ge 0$ thoa $2t+c=3$.

Ta co

$$f(t,t,c)=2t^k(t+c)+2tc^k = 2.3^{k+1}.\frac{t^k(t+c)+tc^k}{(2t+c)^{k+1}} = 2.3^{k+1}\varphi(x)$$

trong ñoi $\varphi(x)=\dfrac{x^k+x+1}{(x+2)^{k+1}}$ vai $x=\dfrac{c}{t}\le 1$.

Ta coi

$$\varphi^{/}(x)=\frac{-x^k+2kx^{k-1}-kx+1-k}{(x+2)^{k+2}}$$

$$\varphi^{/}(x)=0 \Leftrightarrow -x^k+2kx^{k-1}-kx+1-k=0 \qquad (**)$$

Dei thay 1 lai moit nghieim cuia phöông trình (**). Goii $\beta_0,\beta_1,...,\beta_n$ lai tait cai caic nghieim thuoic $[0,1)$ neiu coi phöông trình (**). Khi ñoi, dei thay

$$\varphi(x)\le \max\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\beta_i)\} \ \ \forall x\in[0,1]$$

$$\Rightarrow f(t,t,c)\le 2.3^{k+1}\max\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\beta_i)\}$$

Ngoai ra, dei thay ñaing thöic luoin xaiy ra.

Keit luain

$$+\,1>k>0 \Rightarrow \max\ f(a,b,c)=6$$

$$+\,2\ge k\ge 1 \Rightarrow \max\ f(a,b,c)=2.3^{k+1}\max\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\beta_i)\}$$

$$+\,k>2 \Rightarrow \max\ f(a,b,c)=3^{k+1}\max\{g(1),g(\alpha_i)\}$$

trong ñoi

$+\,\varphi(x)=\dfrac{x^k+x+1}{(x+2)^{k+1}}$ vai $\beta_0,\beta_1,...,\beta_n$ lai tait cai caic nghieim thuoic $[0,1)$ neiu coi phöông trình $-x^k+2kx^{k-1}-kx+1-k=0$.

$+\,g(t)=\dfrac{t^k+t}{(t+1)^{k+1}}$ vai $\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_m$ lai tait cai caic nghieim thuoic $[0,1)$ neiu coi phöông trình $-x^k+2kx^{k-1}-kx+1-k=0$.

**Bai toan 95. (Voi Quoc Ba Can)**

Chöng minh rang vôi moi so döông $x, y, z$ thoa $xy + yz + zx = 1$ ta luon co bat ñang thöc

$$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - 2(x^2 + y^2 + z^2) \geq \sqrt{3} - 2$$

*Lôi giai.*

Ta co Bo ñe sau

**Bo ñe.** $x, y, z$ la cac so thöc thoa $\begin{cases} x + y + z \geq 0 \\ xy + yz + zx \geq 0 \end{cases}$. Khi ño, ta co

$$x(b-c)^2 + y(c-a)^2 + z(a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b, c \in R$$

Bo ñe tren chöng minh rat ñôn gian (chæ can dung tam thöc bac hai la ñöôc) nen ô ñay ta khong nhac lai chöng minh cua no.

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\left(\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} - x - y - z\right) + x + y + z - \sqrt{3} \geq 2(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{y} + \frac{1}{2} . \sum_{cyc} \frac{(x-y)^2}{x + y + z + \sqrt{3}} \geq \sum_{cyc} (x-y)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} (x-y)^2 \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{2\left(x + y + z + \sqrt{3}\right)} - 1 \right) \geq 0$$

Ñat

$$S_x = \frac{1}{z} + \frac{1}{2\left(x + y + z + \sqrt{3}\right)} - 1$$

$$S_y = \frac{1}{x} + \frac{1}{2\left(x + y + z + \sqrt{3}\right)} - 1$$

$$S_z = \frac{1}{y} + \frac{1}{2\left(x + y + z + \sqrt{3}\right)} - 1$$

Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$$

Ta co

$$S_x+S_y+S_z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3+\frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{xy+yz+zx}{xyz}-3+\frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1}{xyz}-3+\frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$$

$$\ge\frac{3\sqrt{3}}{(xy+yz+zx)^{\frac{3}{2}}}-3+\frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$$

$$=3\sqrt{3}-3+\frac{3}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$$

$$>0$$

Ñat $t=\dfrac{1}{2\left(x+y+z+\sqrt{3}\right)}$. Khi ño, ta co

$$S_xS_y+S_yS_z+S_zS_x=\left(t+\frac{1}{x}-1\right)\left(t+\frac{1}{y}-1\right)+\left(t+\frac{1}{y}-1\right)\left(t+\frac{1}{z}-1\right)+$$

$$+\left(t+\frac{1}{z}-1\right)\left(t+\frac{1}{x}-1\right)$$

$$=3t^2+2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-3\right)t+\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+3$$

$$>\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}-2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)+3$$

$$=\frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz}$$

Ta chöng minh

$$\frac{x+y+z+3xyz-2}{xyz}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+3xyz-2\ge 0 \qquad (*)$$

Neu $x+y+z\ge 2$ thì (*) hien nhien ñung.

Neu $x+y+z\le 2$, ñat $p=x+y+z\Rightarrow 2\ge p\ge\sqrt{3}$. The thì theo bat ñang thöc Schur, ta co

$$xyz\ge\frac{4p-p^3}{9}$$

Do ño

$$p+3xyz-2\ge p-2+\frac{4p-p^3}{3}=\frac{-p^3+7p-6}{3}=\frac{(2-p)(p-1)(p+3)}{3}\ge 0$$

$\Rightarrow$ (*) ñung.

Vay ta co $\begin{cases}S_x+S_y+S_z>0\\ S_xS_y+S_yS_z+S_zS_x>0\end{cases}$ nen theo Bo ñe tren, ta co

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0 \text{ (ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x=y=z=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

## Bai toan 96.

Cho $a,b,c,d\ge 0$ thoa $a^2+b^2+c^2+d^2=1$. Tìm gia trò nho nhat cua bieu thöc

$$P=\frac{a}{1+bcd}+\frac{b}{1+cda}+\frac{c}{1+dab}+\frac{d}{1+abc}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\begin{aligned}P&=\frac{a^2}{a+abcd}+\frac{b^2}{b+abcd}+\frac{c^2}{c+abcd}+\frac{d^2}{d+abcd}\\&\ge\frac{(a+b+c+d)^2}{a+b+c+d+4abcd}\\&=\frac{1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{a+b+c+d+4abcd}\end{aligned}$$

Ta lai co

$$1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)-(a+b+c+d+4abcd)=$$

$$
\begin{aligned}
&= (1-a)(1-b)(1-c)(1-d) + (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + \\
&\qquad\qquad + (abc+bcd+cda+dab) - 5abcd \\
&\ge (ab+ac+ad+bc+bd+cd) + (abc+bcd+cda+dab) - 5abcd \\
&\ge 0 \\
&\Rightarrow 1 + 2(ab+ac+ad+bc+bd+cd) \ge a+b+c+d+4abcd \\
&\Rightarrow \frac{1+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd)}{a+b+c+d+4abcd} \ge 1 \\
&\Rightarrow P \ge 1
\end{aligned}
$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $(a,b,c,d) = (1,0,0,0)$.

Vay

$$\min P = 1.$$

Bai toan 97. (Vasile Cirtoaje)

Chöng minh rang vôi moi so thöc $a,b,c$ ta luon co bat ñang thöc

$$(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)$$

*Lôi giai.*

* Cach 1.

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $a = \min\{a,b,c\}$.

Ñat $b = a+p, c = a+q \ (p,q \ge 0)$. Khi ño, ta co

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)^2 \ge 3(a^3b+b^3c+c^3a) \\
&\Leftrightarrow f(a) = (p^2-pq+q^2)a^2 - (p^3-5p^2q+4pq^2+q^3) + \\
&\qquad\qquad + (p^4-3p^3q+2p^2q^2+q^4) \ge 0
\end{aligned}
$$

Ta co

$$
\begin{aligned}
&\Delta_f = -3(p^3-p^2q-2pq^2+q^3)^2 \le 0 \\
&\Rightarrow f(a) \ge 0 \\
&\Rightarrow \text{ñpcm.}
\end{aligned}
$$

* Cach 2.

Ta co

$$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)=\frac{1}{2}.\sum_{cyc}(a^2-2ab+bc-c^2+ca)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)\ \text{(ñpcm)}$$

* Caùch 3.

Ta coù

$$(a^2+b^2+c^2)^2-3(a^3b+b^3c+c^3a)=\frac{1}{6}.\sum_{cyc}(2a^2-b^2-c^2+3bc-3ab)^2\ge 0$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2+c^2)^2\ge 3(a^3b+b^3c+c^3a)\ \text{(ñpcm)}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $\left[\begin{array}{l} a=b=c \\ a:b:c=\sin^2\frac{4\pi}{7}:\sin^2\frac{2\pi}{7}:\sin^2\frac{\pi}{7}\end{array}\right.$

* Nhaän xeùt.

Ñaây laø moät baát ñaúng thöùc maïnh vaø coù nhieàu öùng duïng. Sau ñaây laø moät soá öùng duïng cuûa noù

+ Öùng duïng 1. (Vasile Cirtoaje)

Cho $a,b,c>0$ thoûa $a+b+c=3$. Chöùng minh raèng

$$\frac{a}{ab+1}+\frac{b}{bc+1}+\frac{c}{ca+1}\ge\frac{3}{2}$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù

$$\sum_{cyc}\frac{a}{ab+1}=\sum_{cyc}\left(\frac{a}{ab+1}-a\right)+a+b+c$$

$$=3+\sum_{cyc}\left(\frac{a}{ab+1}-a\right)$$

$$=3-\sum_{cyc}\frac{a^2b}{ab+1}$$

$$\ge 3-\sum_{cyc}\frac{a^2b}{2\sqrt{ab}}\ \text{(theo bñt AM-GM)}$$

$$=3-\frac{1}{2}.\sum_{cyc} a^{3/2}b^{1/2}$$

Theo tren, ta co

$$\sum_{cyc} a^{3/2}b^{1/2} \le \frac{1}{3}.(a+b+c)^2 = 3$$

Do ño

$$\sum_{cyc}\frac{a}{ab+1} \ge 3-\frac{1}{2}.\sum_{cyc} a^{3/2}b^{1/2} \ge 3-\frac{1}{2}.3=\frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c=1$.

+ Öng dung 2.

Cho cac so khong am $a,b,c,x$ thoa $a^2+b^2+c^2=1$. Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{1+xab}+\frac{b^2}{1+xbc}+\frac{c^2}{1+xca} \ge \frac{3}{3+x}$$

*Lôi giai.*

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{a^2}{1+xab}+a^2(1+xab)\left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \ge \frac{6a^2}{3+x}$$

$$\frac{b^2}{1+xbc}+b^2(1+xbc)\left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \ge \frac{6b^2}{3+x}$$

$$\frac{c^2}{1+xca}+c^2(1+xca)\left(\frac{3}{3+x}\right)^2 \ge \frac{6c^2}{3+x}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{1+xab}+\frac{b^2}{1+xbc}+\frac{c^2}{1+xca} \ge \frac{6}{3+x}-\left(\frac{3}{3+x}\right)^2 - x\left(\frac{3}{3+x}\right)^2(a^3b+b^3c+c^3a)$$

Theo tren, ta co

$$a^3b+b^3c+c^3a \le \frac{1}{3}.(a^2+b^2+c^2)^2 = \frac{1}{3}$$

Do ño

$$\frac{a^2}{1+xab}+\frac{b^2}{1+xbc}+\frac{c^2}{1+xca}\geq\frac{6}{3+x}-\left(\frac{3}{3+x}\right)^2-x\left(\frac{3}{3+x}\right)^2(a^3b+b^3c+c^3a)$$
$$\geq\frac{6}{3+x}-\left(\frac{3}{3+x}\right)^2-x\left(\frac{3}{3+x}\right)^2.\frac{1}{3}$$
$$=\frac{3}{3+x}$$
$$\Rightarrow\frac{a^2}{1+xab}+\frac{b^2}{1+xbc}+\frac{c^2}{1+xca}\geq\frac{3}{3+x}\ \text{(ñpcm)}$$

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $a=b=c=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

## Bai toain 98. (Komal)

Cho caic soi döông $a,b,c$ thoia $abc=1$. Chöing minh raing

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{3}{a+b+c}\geq\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right).\frac{2}{a^2+b^2+c^2}$$

*Lôi giai.*

Ta coi bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$ab+bc+ca-\frac{3abc}{a+b+c}\geq\frac{2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2+b^2+c^2}$$

Do cai hai vei cuia bat ñaing thöic nay ñoing baic nein khoing mat tính toing quat, ta coi thei gia söi $a+b+c=1$. Ñat $q=ab+bc+ca, r=abc\Rightarrow\frac{1}{3}\geq q\geq 0, r\geq 0$. Khi ñoi, ta coi bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$q-3r\geq\frac{2(q^2-2r)}{1-2q}$$
$$\Leftrightarrow r(6q+1)+q(1-4q)\geq 0$$

Neiu $1\geq 4q$ thì bat ñaing thöic trein hiein nhiein ñuing.

Neiu $4q\geq 1$ thì theo bat ñaing thöic Schur, ta coi $r\geq\frac{4q-1}{9}\geq 0$. Do ñoi

$$r(6q+1)+q(1-4q)\geq \frac{(4q-1)(6q+1)}{9}+q(1-4q)=\frac{(4q-1)(1-3q)}{9}\geq 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 99. (Nguyen Anh Cöông)

Cho cac so döông $x, y, z$ thoa $x+y+z=1$. Chöng minh rang

$$\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{yz}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{(y+z)(y+x)}+\sqrt{zx}}}+\sqrt{\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{(z+x)(z+y)}+\sqrt{xy}}}\geq 2$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{(x+y)(x+z)}+\sqrt{yz}}}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x(x+y+z)+yz}+\sqrt{yz}}}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+\frac{yz}{x}}+\sqrt{\frac{yz}{x}}}}\geq 2$$

Ñat $m=\sqrt{\frac{yz}{x}}, n=\sqrt{\frac{zx}{y}}, p=\sqrt{\frac{xy}{z}}$ thì ta co $m, n, p>0$ va $mn+np+pm=1$. Khi ño,

ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{m^2+1}+m}}\geq 2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\sqrt{\sqrt{m^2+1}-m}\geq 2$$

Ñat $a=\sqrt{m^2+1}-m, b=\sqrt{n^2+1}-n, c=\sqrt{p^2+1}-p$ thì ta co $1>a,b,c>0$ va

$$m=\frac{1-a^2}{2a}$$

$$n=\frac{1-b^2}{2b}$$

$$p = \frac{1-c^2}{2c}$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc} \frac{(1-a^2)(1-b^2)}{4ab} = mn + np + pm = 1$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} c(1-a^2)(1-b^2) = 4abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c) - \sum_{cyc} ab(a+b) + abc(ab+bc+ca) = 4abc$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c-abc)(1-ab-bc-ca) = 0 \qquad (*)$$

Do $1 > a,b,c > 0$ nen $a+b+c-abc > 0$. Do ño

$$(*) \Leftrightarrow ab+bc+ca = 1$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \ge 2 \qquad (**)$$

trong ño $a,b,c > 0$ thoa $ab+bc+ca = 1$.

Ta co

$$(**) \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^4 \ge 16(ab+bc+ca) \qquad (***)$$

Do ca 2 ve cua bat ñang thöc tren ñong bac nen khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} = 1$.

Ñat $q = \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}, r = \sqrt{abc} \Rightarrow \frac{1}{3} \ge q \ge 0, r \ge 0$. Khi ño, ta co

$$(***) \Leftrightarrow 1 \ge 16(q^2 - 2r)$$
$$\Leftrightarrow 32r + (1-4q)(1+4q) \ge 0$$

Neu $1 \ge 4q$ thì bat ñang thöc tren hien nhien ñung.

Neu $4q \ge 1$ thì theo bat ñang thöc Schur, ta co $r \ge \frac{4q-1}{9} \ge 0$. Do ño

$$32r + (1-4q)(1+4q) \ge \frac{32(4q-1)}{9} + (1-4q)(1+4q) = \frac{(4q-1)(23-36q)}{9} \ge 0$$

$\Rightarrow (***)$ ñung.

$\Rightarrow$ ñpcm.

## Bai toan 100. (Pham Kim Hung, Vo Quoc Ba Can)

Cho $a,b,c\ge 0$ thoa $a+b+c=1$. Tìm ñieu kien can va ñu vôi $a,b,c$ ñe bat ñang thöc sau ñung

$$(a^2+b^2+c^2)(8a^2b^2+8b^2c^2+8c^2a^2+19abc)\ge ab+bc+ca$$

*Lôi giai.*

Ta se chöng minh rang ñieu kien can va ñu ñe bat ñang thöc tren ñung la $\sqrt{a},\sqrt{b}$ va $\sqrt{c}$ la ñoä dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien).

+ Ñieu kien can.

Gia sö $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ khong la ñoä dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien). Khi ño, cho $c=0,a,b>0$ thì bat ñang thöc tren trô thanh

$$8(a^2+b^2)a^2b^2\ge ab$$
$$\Leftrightarrow 8(a^2+b^2)ab\ge 1 \qquad (*)$$

Cho $a=1,b\to 0^+$ thì ta co $\lim\limits_{b\to 0^+} 8ab(a^2+b^2)=0<1$ nen (*) khong ñung.

Vay ta phai co $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ la ñoä dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien).

+ Ñieu kien ñu.

Gia sö $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ la ñoä dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien). Khi ño, ta se chöng minh

$$(a^2+b^2+c^2)(8a^2b^2+8b^2c^2+8c^2a^2+19abc)\ge ab+bc+ca$$

Ñat $q=ab+bc+ca, r=abc\Rightarrow \frac{1}{3}\ge q\ge 0, r\ge 0$. Do $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ la ñoä dai ba canh cua mot tam giac (co the suy bien) nen

$$4q-1=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)>0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3}\ge q\ge \frac{1}{4}$$

Do ñoù, theo baát ñaúng thöùc Schur, ta coù $r \ge \frac{4q-1}{9} \ge 0$.

Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$(1-2q)(19r+8(q^2-2r)) \ge q$$

$$\Leftrightarrow (1-2q)(3r+8q^2) \ge q \qquad (**)$$

Ta coù

$$(1-2q)(3r+8q^2)-q \ge (1-2q)\left(\frac{4q-1}{3}+8q^2\right)-q$$
$$=\frac{(4q-1)(1-3q)(4q+1)}{3}$$
$$\ge 0$$

Do ñoù (**) ñuùng.

Vaäy ñieàu kieän caàn vaø ñuû ñeå baát ñaúng thöùc ñaõ cho ñuùng laø $\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c}$ laø ñoä daøi ba caïnh cuûa moät tam giaùc (coù theå suy bieán).

**Baøi toaùn 101. (Titu Andreescu)**

Cho caùc soá thöïc $a,b$ thoûa $3(a+b) \ge 2|ab+1|$. Chöùng minh raèng

$$9(a^3+b^3) \ge |a^3b^3+1|$$

*Lôøi giaûi.*

Ñaët $S=a+b, P=ab$ thì töø giaû thieát, ta coù $3S \ge 2|P+1|$ (*). Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$9S(S^2-3P) \ge |P+1|(P^2-P+1)$$

Coù 2 tröôøng hôïp xaûy ra

* Tröôøng hôïp 1. $P \le \frac{7-3\sqrt{5}}{2} \vee P \ge \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. Khi ñoù, töø (*), ta coù

$$9S(S^2-3P) \ge 6|P+1|\left(\frac{4(P+1)^2}{9}-3P\right)=\frac{2|P+1|(4P^2-19P+4)}{3}$$

Do ñoù, ñeå chöùng minh baát ñaúng thöùc ñaõ cho, ta chæ caàn chöùng minh

$$2(4P^2-19P+4)\ge 3(P^2-P+1)$$
$$\Leftrightarrow 5\left(P-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)\left(P-\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

* Tröôøng hôïp 2. $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\le P\le\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$. Töø ñaây, ta coù $a,b$ cuøng daáu, töø ñoù töø giaû thieát, ta suy ra ñöôïc $a,b>0$. Khi ñoù, (*) trôû thaønh $3S\ge 2(P+1)\Rightarrow 0<P\le\frac{3S-2}{2}$.

Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$9S(S^2-3P)\ge P^3+1$$
$$\Leftrightarrow 9S^3-27PS-P^3-1\ge 0$$

+ Tröôøng hôïp 2.1. $\frac{S^2}{4}\ge\frac{3S-2}{2}\Leftrightarrow S^2-6S+4\ge 0$. Khi ñoù, ta coù

$$\begin{aligned}9S^3-27PS-P^3-1&\ge 9S^3-\frac{27S(3S-2)}{2}-\frac{(3S-2)^3}{8}-1\\&=\frac{45S(S^2-6S+4)}{8}\\&\ge 0\end{aligned}$$

+ Tröôøng hôïp 2.2. $\frac{S^2}{4}\le\frac{3S-2}{2}\Leftrightarrow\left(3-\sqrt{5}\right)^3\le S^3\le\left(3+\sqrt{5}\right)^3$. Khi ñoù, ta coù

$$\begin{aligned}9S^3-27PS-P^3-1&\ge 9S^3-\frac{27S^3}{4}-\frac{S^6}{64}-1\\&=\frac{\left(\left(3+\sqrt{5}\right)^3-S^3\right)\left(S^3-\left(3-\sqrt{5}\right)^3\right)}{64}\\&\ge 0\end{aligned}$$

Toùm laïi, trong moïi tröôøng hôïp, ta luoân coù $9S(S^2-3P)\ge\left|P^3+1\right|$ (ñpcm)

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $(a,b)=\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.

## Bai toan 102. (Pham Kim Hung)

Cho cac so khong am $a,b,c.$ Chöùng minh rang

$$\frac{a^3}{2a^2+b^2}+\frac{b^3}{2b^2+c^2}+\frac{c^3}{2c^2+a^2}\ge\frac{a+b+c}{3}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöùc can chöùng minh töông ñöông vôi

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\ge 0$$

Co 2 tröôøng hôïp xay ra

+ Tröôøng hôïp 1. $a\ge b\ge c\ge 0$. Khi ño, ta co

$$\frac{4b}{2a^2+b^2}-\frac{c}{2c^2+a^2}\ge 0$$

$$\frac{-2a}{2a^2+b^2}+\frac{2a}{2c^2+a^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{4b-2a}{2a^2+b^2}+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{4b-2a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\ge 0 \qquad (1)$$

$$\frac{(4c-2b)b^2}{2b^2+c^2}+\frac{(2a-c)a^2}{2c^2+a^2}\ge 0$$

$$\Rightarrow\frac{4c-2b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\ge 0 \qquad (2)$$

Cong cac bat ñang thöùc (1) va (2) ve theo ve roi chia ca hai ve cho 2, ta ñöôïc

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\ge 0$$

+ Tröôøng hôïp 2. $c\ge b\ge a\ge 0.$

+ Tröôøng hôïp 2.1. $2b\ge c+a.$ Khi ño, ta se chöùng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2}\ge 0$$

That vay, de thay ve trai la ham tang cua $c$ nen ta chæ can chöng minh khi $c=b$, töc la chöng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-b)}{2b^2+a^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 4b^3+2a^2b-2ab^2+16a^3-8a^2b+8ab^2-4b^3\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 3a(5a^2-2ab+2b^2)\ge 0$$ (ñung)

Do ño $\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{4(2a-c)}{2c^2+a^2}\ge 0$

Vay

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2+\frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2\ge$$

$$\ge \frac{2b-a}{4(2a^2+b^2)}.(c-a)^2+\frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2$$

$$\ge 0$$

+ Tröông hôp 2.2. $2b\le c+a$. Khi ño, ta se chöng minh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{6a-3c}{2c^2+a^2}\ge 0 \qquad (3)$$

That vay, de thay ve trai la ham tang cua $c$ nen chæ can chöng khi $c=2b-a$. Bat ñang thöc (3) trô thanh

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}+\frac{9a-6b}{8b^2+3a^2-8ab}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 10b^3-15b^2a+2a^2b+15a^3\ge 0$$ (ñung)

Tiep theo, ta se chöng minh

$$\frac{2c-b}{2b^2+c^2}+\frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\ge 0 \qquad (4)$$

That vay, vì ve trai la ham giam theo $a$ nen ta chæ can chöng minh khi $a=b$, bat ñang thöc trô thanh

$$\frac{4c-2b}{2b^2+c^2}+\frac{6b-3c}{2c^2+b^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 5c^3+2c^2b-2b^2c+10b^3\ge 0$$ (ñung)

Neu $c \le 2a$ thì ta co bat ñang thöc can chöng minh ñung. Neu $c \ge 2a$ thì tö 2 bat ñang thöc tren, vôi chu y rang $(c-a)^2 \le 3(b-a)^2 + \frac{3}{2}.(c-b)^2$, ta co

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2 \ge$$
$$\ge \left(\frac{2b-a}{2a^2+b^2} + \frac{3(2a-c)}{2c^2+a^2}\right).(b-a)^2 + \left(\frac{2c-b}{2b^2+c^2} + \frac{3}{2}.\frac{2a-c}{2c^2+a^2}\right).(c-b)^2$$
$$\ge 0$$

Tom lai, ta luon co

$$\frac{2b-a}{2a^2+b^2}.(a-b)^2 + \frac{2c-b}{2b^2+c^2}.(b-c)^2 + \frac{2a-c}{2c^2+a^2}.(c-a)^2 \ge 0 \quad \text{(ñpcm)}$$

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

## Bai toan 103. (Vo Quoc Ba Can)

Cho $n$ so thöc $a_1, a_2, ..., a_n > 0$ thoa $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$. Chöng minh rang

$$3\sum_{i=1}^{n} a_i \ge \sum_{i=1}^{n} \sqrt{a_i^2+8}$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}$$
$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-1}{a_i} = 0$$

Bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{8(a_i^2-1)}{3a_i + \sqrt{a_i^2+8}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{a_i^2-1}{a_i}}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_i^2}}} \ge 0$$

Khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n > 0.$

Khi ño, de thay $\begin{cases} \dfrac{a_1^2-1}{a_1} \ge \dfrac{a_2^2-1}{a_2} \ge ... \ge \dfrac{a_n^2-1}{a_n} \\ \dfrac{1}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_1^2}}} \ge \dfrac{1}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_2^2}}} \ge ... \ge \dfrac{1}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_n^2}}} \end{cases}$ nen theo bat ñang thöc Chebyshev, ta co

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\dfrac{a_i^2-1}{a_i}}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_i^2}}} \ge \frac{1}{n}.\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-1}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3+\sqrt{1+\dfrac{8}{a_i^2}}}\right) = 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n = 1.$

## Bai toan 104.

Cho cac so khong am $a,b,c.$ Chöng minh rang

$$a^3+b^3+c^3-3abc \ge 2\left(\frac{b+c}{2}-a\right)^3$$

*Lôi giai.*

Ñat

$$f(a,b,c) = a^3+b^3+c^3-3abc+2\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^3$$

Khi ño, ta can chöng minh

$$f(a,b,c) \ge 0$$

Tröôc het, ta chöng minh

$$f(a,b,c) \geq f\left(a,\frac{b+c}{2},\frac{b+c}{2}\right) \qquad (*)$$

Thaät vaäy

$$(*) \Leftrightarrow a^3+b^3+c^3-3abc+2\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^3 \geq$$

$$\geq a^3+\frac{(b+c)^3}{4}-3a.\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+2\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow \frac{4b^3+4c^3-(b+c)^3}{4}+\frac{3a((b+c)^2-4bc)}{4} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(b-c)^2(b+c)}{4}+\frac{3a(b-c)^2}{4} \geq 0 \ \text{ (ñuùng)}$$

Vaäy (*) ñuùng.

Tieáp theo, ta seõ chöùng minh

$$f(a,t,t) \geq 0 \qquad (**)$$

trong ñoù $t=\frac{b+c}{2}$.

Ta coù

$$(**) \Leftrightarrow a^3+2t^3-3at^2+2(a-t)^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a-t)^2(a+2t)+2(a-t)^3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 3a(a-t)^2 \geq 0 \ \text{ (ñuùng)}$$

Töø (*) vaø (**), ta suy ra ñieàu phaûi chöùng minh.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$ hoaëc $a=0, b=c$.

Baøi toaùn 105.

Chöùng minh raèng vôùi moïi soá döông $a,b,c$ thì

a) $$\frac{a}{\sqrt{a+b}}+\frac{b}{\sqrt{b+c}}+\frac{c}{\sqrt{c+a}}\ge\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{2}}$$

b) $$\sqrt{\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}}+\sqrt{\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}}+\sqrt{\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}}\ge\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\sqrt{3}}$$

*Lôøi giaûi.*

a) Ñaët $a=x^2,b=y^2,c=z^2$ $(x,y,z>0)$. Baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh trôû thaønh

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}}\ge\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{z^2+x^2}}\right)^2\ge\left(\frac{x+y+z}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{2x^4}{x^2+y^2}+\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}\ge(x+y+z)^2$$

Löu yù raèng $\displaystyle\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^2+y^2}-\sum_{cyc}\frac{y^4}{x^2+y^2}=0$

Do ñoù, baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\sum_{cyc}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}+\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}\ge(x+y+z)^2$$

Deã thaáy $\left(\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y^2z^2}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{z^2x^2}{\sqrt{z^2+x^2}}\right)$ vaø $\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}},\frac{1}{\sqrt{z^2+x^2}}\right)$ laø

2 daõy ñôn ñieäu ngöôïc chieàu nhau neân theo baát ñaúng thöùc saép xeáp laïi, ta coù

$$\sum_{cyc}\frac{x^2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2)(y^2+z^2)}}\ge\sum_{cyc}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$$

Do ñoù, ñeå chöùng minh baát ñaúng thöùc ñaõ cho, ta chæ caàn chöùng minh

$$\sum_{cyc}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}+\sum_{cyc}\frac{4x^2y^2}{x^2+y^2}\ge (x+y+z)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}x^2+\sum_{cyc}\frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}\ge 2(xy+yz+zx)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\sum_{cyc}(x-y)^2\ge \sum_{cyc}\frac{xy(x-y)^2}{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(x-y)^4}{x^2+y^2}\ge 0 \text{ (ñuing)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $a=b=c$.

b) Ñait $a=x^2, b=y^2, c=z^2$ $(x,y,z>0)$. Bait ñaing thöic cain chöing minh trôi thainh

$$\frac{x^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}}\ge \frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{x^3}{\sqrt{x^4+x^2y^2+y^4}}+\frac{y^3}{\sqrt{y^4+y^2z^2+z^4}}+\frac{z^3}{\sqrt{z^4+z^2x^2+x^4}}\right)^2\ge \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{x^6}{x^4+x^2y^2+y^4}+2\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\ge$$

$$\ge \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{3}$$

Löu yi raing $\sum_{cyc}\frac{x^6}{x^4+x^2y^2+y^4}-\sum_{cyc}\frac{y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}=0$

Do ñoi, bait ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôi

$$\frac{1}{2}.\sum_{cyc}\frac{x^6+y^6}{x^4+x^2y^2+y^4}+2\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\ge$$

$$\ge \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{3}$$

$$\Leftrightarrow 6\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\ge\frac{1}{2}.\sum_{cyc}\left(x^2+y^2+4xy-\frac{3(x^6+y^6)}{x^4+x^2y^2+y^4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{6x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\ge\sum_{cyc}\frac{6x^3y^3-(x-y)^4(x+y)^2}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

Mat khac, dei thay $\left(\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)}},\frac{y^3z^3}{\sqrt{(y^4+y^2z^2+z^4)}},\frac{z^3x^3}{\sqrt{(z^4+z^2x^2+z^4)}}\right)$ va

$\left(\frac{1}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)}},\frac{1}{\sqrt{(y^4+y^2z^2+z^4)}},\frac{1}{\sqrt{(z^4+z^2x^2+z^4)}}\right)$ la hai day ñôn ñieu

ngöôc chieu nhau nen theo bat ñang thöc sap xep lai, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{\sqrt{(x^4+x^2y^2+y^4)(y^4+y^2z^2+z^4)}}\ge\sum_{cyc}\frac{x^3y^3}{x^4+x^2y^2+y^4}$$

Tö ñay, ta suy ra ñieu phai chöng minh.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

## Bai toan 106. (Phan Thanh Viet)

Cho cac so khong am $a,b,c$. Chöng minh rang

$$\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^4}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^4}{c^2+ca+a^2}\ge\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{a+b+c}=\frac{(a+b+c)\left(\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab\right)+3abc}{a+b+c}=\frac{3abc}{a+b+c}+\sum_{cyc}a^2-\sum_{cyc}ab$$

Do ño, bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-\sum_{cyc}a^2+\sum_{cyc}ab\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{a^2+ab+b^2}-a^2+ab\right)\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\left(\sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\right)\left(\sum_{cyc}\frac{a^2+ab+b^2}{ab}\right)\ge(a+b+c)^2$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{ab^3}{a^2+ab+b^2}\ge\frac{(a+b+c)^2}{3+\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{ab}}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{3+\sum_{cyc}\frac{a^2+b^2}{ab}}\ge\frac{3abc}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^3\ge 9abc+3\sum_{cyc}c(a^2+b^2)$$

$\Leftrightarrow a^3+b^3+c^3\ge 3abc$ (ñung theo bñt AM-GM)

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

## Bai toan 107.

Chöng minh rang vôi moi so döông $a,b,c$ thoa $abc=1$ ta co bat ñang thöc

$$\frac{a^2}{(2a+b)(1+ab)}+\frac{b^2}{(2b+c)(1+bc)}+\frac{c^2}{(2c+a)(1+ca)}\ge\frac{1}{2}$$

*Lôi giai.*

Do $\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$ nen ton tai cac so döông $x,y,z$ sao cho $a=\frac{x}{y}, b=\frac{y}{z}$ va $c=\frac{z}{x}$.

Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\sum_{cyc}\frac{x^2y^2}{z(z^2+2xy)(x+y)}\geq\frac{1}{2}$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{x^2y^2}{z(z^2+2xy)(x+y)}&=\frac{1}{xyz}.\sum_{cyc}\frac{x^4y^4}{xy(z^2+2xy)(x+y)}\\&\geq\frac{1}{xyz}.\frac{(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2}{\sum_{cyc}xy(z^2+2xy)(x+y)}\\&=\frac{1}{xyz}.\frac{(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2}{2xyz(xy+yz+zx)+2\sum_{cyc}x^2y^2(x+y)}\\&=\frac{(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)^2}{2xyz(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)(x+y+z)}\\&=\frac{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2}{2xyz(x+y+z)}\\&\geq\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Bai toan 108. (Vasile Cirtoaje)

Cho cac so thöc $a,b,c$. Chöng minh rang

$$3(1-a+a^2)(1-b+b^2)(1-c+c^2)\geq 1+abc+a^2b^2c^2$$

*Lôi giai.*

Söû dung ñang thöc

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2)=1+a^2b^2+(a-b)^2+(1-a)^2(1-b)^2$$

Ta co

$$2(1-a+a^2)(1-b+b^2)\geq 1+a^2b^2$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$3(1+a^2b^2)(1-c+c^2)\geq 2(1+abc+a^2b^2c^2)$$

$$\Leftrightarrow\ f(c)=(3+a^2b^2)c^2-(3+2ab+3a^2b^2)c+1+3a^2b^2\geq 0$$

Ta có

$$\Delta_f = -3(1-ab)^4 \le 0$$

Do đó

$$f(c) \ge 0$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 1$.

**Bài toán 109. (Vasile Cirtoaje)**

Chứng minh rằng với mọi số không âm $a,b,c,d$ thỏa $a^2 - ab + b^2 = c^2 - cd + d^2$ ta có bất đẳng thức

$$(a+b)(c+d) \ge 2(ab+cd)$$

*Lời giải.*

Đặt $f(a,b,c,d) = (a+b)(c+d) - 2(ab+cd)$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c+d \ge a+b \ge 0$. Khi đó, ta có

$$f(a,b,c,d) - f\left(a,b,\sqrt{c^2-cd+d^2},\sqrt{c^2-cd+d^2}\right) =$$
$$= (a+b)\left(c+d-2\sqrt{c^2-cd+d^2}\right) + 2(c-d)^2$$
$$= (c-d)^2\left(2 - \frac{3(a+b)}{c+d+2\sqrt{c^2-cd+d^2}}\right)$$
$$\ge 0 \ \ (\text{do } c+d \ge a+b \ge 0)$$

Do đó

$$f(a,b,c,d) \ge f\left(a,b,\sqrt{c^2-cd+d^2},\sqrt{c^2-cd+d^2}\right)$$
$$= f\left(a,b,\sqrt{a^2-ab+b^2},\sqrt{a^2-ab+b^2}\right) \qquad (1)$$

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh

$$f\left(a,b,\sqrt{a^2-ab+b^2},\sqrt{a^2-ab+b^2}\right) \ge 0 \qquad (2)$$

Thật vậy

$$(2) \Leftrightarrow 2(a+b)\sqrt{a^2-ab+b^2} \ge 2(a^2+b^2)$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2(a^2-ab+b^2) \ge (a^2+b^2)^2$$

$$\Leftrightarrow ab(a-b)^2 \ge 0 \quad \text{(ñuing)}$$

Tö (1) va (2), ta suy ra ñieu phai chöng minh.

## Bai toan 110. (Pham Kim Hung)

Cho cac so döông $a,b,c$. Chöng minh rang

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(a+\frac{c^2}{b}\right)^2 \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}.$$

*Lôi giai.*

Ta co

$$\left(a+\frac{b^2}{c}\right)^2+\left(b+\frac{c^2}{a}\right)^2+\left(a+\frac{c^2}{b}\right)^2 \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} a^2+2\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c}+\sum_{cyc}\frac{a^4}{b^2} \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}\left(\frac{ab^2}{c}+ac-2ab\right)+\sum_{cyc}\left(\frac{a^4}{b^2}+b^2-2a^2\right)+$$

$$+2\left(\sum_{cyc}ab-\sum_{cyc}a^2\right) \ge \frac{12(a^3+b^3+c^3)}{a+b+c}-4(a^2+b^2+c^2)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(b-c)^2\left(\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}-4\right) \ge 0$$

Ñat

$$S_a=\frac{b^2}{c^2}+\frac{4a}{a+b+c}+\frac{2(a+b)}{c}-4$$

$$S_b=\frac{c^2}{a^2}+\frac{4b}{a+b+c}+\frac{2(b+c)}{a}-4$$

$$S_c=\frac{a^2}{b^2}+\frac{4c}{a+b+c}+\frac{2(c+a)}{b}-4$$

Bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Co 2 tröông hôp xay ra

+ Tröông hôp 1. $c \ge b \ge a > 0$. Khi ño, ta co $S_b \ge 0$.

Ta co

$$S_a + S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(a+b)}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{2(b+c)}{a} - 8 \ge 0$$

Vì $\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge 2, \frac{2a}{c} + \frac{2c}{a} \ge 4, \frac{2b}{a} \ge 2$

$$S_c + S_b = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} + \frac{4(b+c)}{a+b+c} + \frac{2(a+c)}{b} + \frac{2(b+c)}{a} - 8 \ge 0$$

Vì $\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{a^2} \ge 2, \frac{2a}{b} + \frac{2b}{a} \ge 4, \frac{2c}{a} \ge 2$

Do ño

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \ge (S_a + S_b)(b-c)^2 + (S_c + S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

+ Tröông hôp 2. $a \ge b \ge c > 0$. Khi ño, ta co $S_a \ge 1, S_c \ge -1$.

Ta co

$$S_a + 2S_b = \frac{b^2}{c^2} + \frac{2c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{4(b+c)}{a} - 12 \ge 0$$

Vì $\frac{4a+8b}{a+b+c} \ge 4, \frac{2a}{c} + \frac{2b}{a} \ge 4, \frac{2c}{a} + \frac{2a}{c} \ge 4$

$$\begin{aligned} S_a + 4S_b &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 20 \\ &\ge \frac{b^2}{c^2} + \frac{4c^2}{a^2} + \frac{8b+4a}{a+b+c} + \frac{2(a+b)}{c} + \frac{8(b+c)}{a} - 16 = f(b) \end{aligned}$$

De dang kiem tra $f(b)$ la ham ñong bien. Do ño

$$f(b) \ge f(c) = \frac{4c^2}{a^2} + \frac{16c}{a} + \frac{2a}{c} - 9 \ge 2\sqrt{32} - 9 > 1$$

+ Kha nang 2.1. $a + c \le 2b \Leftrightarrow 2(b-c) \ge a - c \ge 0 \wedge b - c \ge a - b \ge 0$.

Neu $S_b \ge 0$ thì ta co ngay ñpcm. Neu $S_b \le 0$, thì

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+4S_b-1)(b-c)^2 \ge 0$$

+ Khai naing 2.2. $a+c \ge 2b.$. Khi ñoi, ta sei chöing minh $S_c+2S_b \ge 0.$ Thait vaiy, ta coi

$$S_c+2S_b=\frac{a^2}{b^2}+\frac{2c^2}{a^2}+\frac{8b+4c}{a+b+c}+\frac{2(a+c)}{b}+\frac{4(b+c)}{a}-12=g(c)$$

+ Khai naing 2.2.1. $a \ge 2b$. Khi ñoi, do $g(c)$ lai ham taing nein

$$g(c) \ge g(0)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b}{a+b}+\frac{4b}{a}+\frac{2a}{b}-12 \ge 0$$

Vì $\frac{a}{b}+\frac{9b}{a+b} \ge 5, \frac{a}{b}+\frac{4b}{a} \ge 4, \frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b} \ge 6, \frac{-b}{a+b} \ge -\frac{1}{3}$

+ Khai naing 2.2.2. $a \le 2b$. Khi ñoi, do $g(c)$ lai ham taing nein

$$g(c) \ge g(2b-a)=\frac{a^2}{b^2}+\frac{8b^2}{a^2}+\frac{4b}{a}-\frac{4a}{3b}-\frac{14}{3} \ge 0 \quad (\text{do } 2b \ge a \ge b)$$

Vaiy

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_a+2S_b)(b-c)^2+(S_c+2S_b)(a-b)^2 \ge 0$$

Toim laii, trong moii tröôøng hôip, ta luoin coi

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0 \quad (\text{ñpcm})$$

Ñaing thöic xaiy ra khi vai chæ khi $a=b=c.$

## Bai toain 111.

Chöing minh raing vôùi moii soi döông $a,b,c,d$ ta coi bait ñaing thöic

$$\frac{b(a+c)}{c(a+b)}+\frac{c(b+d)}{d(b+c)}+\frac{d(c+a)}{a(c+d)}+\frac{a(d+b)}{b(d+a)} \ge 4$$

*Lôøi giaii.*

Ta coi bat ñaing thöic cain chöing minh töông ñöông vôùi

$$(a+c)\left(\frac{b}{c(a+b)}+\frac{d}{a(c+d)}\right)+(b+d)\left(\frac{c}{d(b+c)}+\frac{a}{b(d+a)}\right)\ge 4$$

$$\Leftrightarrow (abc+abd+acd+bcd)\left(\frac{a+c}{ac(a+b)(c+d)}+\frac{b+d}{bd(b+c)(d+a)}\right)\ge 4$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)}\right)\ge 4$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\left(\frac{1}{d}+\frac{1}{a}\right)}\right)\ge$$

$$\ge 4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)\left(\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}+\frac{\frac{1}{b}+\frac{1}{d}}{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)^2}\right)$$

$$=4$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Bai toan 112. (Vo Quoc Ba Can)

Chöng minh rang vôi moi so thöc döông $a,b,c$ ta co bat ñang thöc

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{2}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{2}{c+2a}\ge\frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+a}$$

*Lôi giai.*

Tröôc het, ta chöng minh Bo ñe sau

Bo ñe. Vôi moi so thöc döông $x,y,z$ ta co bat ñang thöc

$$x^3+y^3+z^3+2(xy^2+yz^2+zx^2)\ge 3(x^2y+y^2z+z^2x)$$

*Chöng minh.*

Ta co

$$x^3+y^3+z^3+2(xy^2+yz^2+zx^2)\ge 3(x^2y+y^2z+z^2x)$$
$$\Leftrightarrow 3(x^3+y^3+z^3)+6(xy^2+yz^2+zx^2)\ge 9(x^2y+y^2z+z^2x)$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(2x^3+y^3-3x^2y)+6\left(\sum_{cyc}xy^2-\sum_{cyc}x^2y\right)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2(2x+y)+6(x-y)(y-z)(z-x)\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2(2x+y)+2\sum_{cyc}(x-y)^3\ge 0$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(x-y)^2(4x-y)\ge 0$$

Ñat $S_x=4y-z, S_y=4z-x, S_z=4x-y$

Bat ñang thöc can chöng minh trô thanh $S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge 0$

Co 2 tröông hôp xay ra

* Tröông hôp 1. $x\le y\le z$. Khi ño, ta co $S_y\ge 0$. Ta lai co

$$S_y+S_z=4z-y+3x\ge 0$$
$$S_y+S_x=3z+4y-x\ge 0$$

Chu y rang $(z-x)^2\ge (x-y)^2+(y-z)^2$ nen ta co

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge (S_x+S_y)(y-z)^2+(S_y+S_z)(x-y)^2\ge 0$$

* Tröông hôp 2. $x\ge y\ge z\Rightarrow S_x,S_z\ge 0$. Neu $S_y\ge 0$ thì ta co ngay ñpcm, do ño ta chæ can xet tröông hôp $S_y\le 0$ la ñu.

+ Tröông hôp 2.1. $2y\ge x+z\Rightarrow 2y\ge x$. Khi ño, ta co

$$S_x+2S_y=4y-2x+7z\ge 0$$
$$S_z+2S_y=2x-y+8z\ge 0$$

Mat khac theo bat ñang thöc Bunhiacopxki thì $(z-x)^2\le 2(x-y)^2+2(y-z)^2$.

Do ño

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\ge (S_x+2S_y)(y-z)^2+(2S_y+S_z)(x-y)^2\ge 0$$

+ Tröông hôp 2.2. $x+z\ge 2y\Leftrightarrow 2(x-y)\ge x-z\ge 0.$

+ Tröông hôp 2.2.1. $\left(\sqrt{3}-1\right)x+z\geq\sqrt{3}y\Leftrightarrow\sqrt{3}(x-y)\geq x-z\geq 0.$ Khi ño,

ta co

$$S_z+3S_y=x-y+12z\geq 0$$

Do ño

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\geq(3S_y+S_z)(x-y)^2\geq 0$$

+ Tröông hôp 2.2.2. $\left(\sqrt{3}-1\right)x+z\leq\sqrt{3}y\Leftrightarrow y-z\geq\left(\sqrt{3}-1\right)(x-y)\geq 0.$

Khi ño, ta co

$$S_x\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4S_y+S_z=\left(15-8\sqrt{3}\right)y+2\left(6+\sqrt{3}\right)z\geq 0$$

Do ño

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\geq\left(S_x\left(\sqrt{3}-1\right)^2+4S_y+S_z\right)(x-y)^2\geq 0$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$S_x(y-z)^2+S_y(z-x)^2+S_z(x-y)^2\geq 0$$

Bo ñe ñöôc chöng minh hoan toan.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $x=y=z.$

Trô lai bai toan cua ta

Ap dung Bo ñe tren vôi $x=t^a,y=t^b,z=t^c$ $(t>0)$, ta ñöôc

$$t^{3a}+t^{3b}+t^{3c}+2(t^{a+2b}+t^{b+2c}+t^{c+2a})\geq 3(t^{2a+b}+t^{2b+c}+t^{2c+a})\ \ \forall t>0$$

$$\Rightarrow t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+2(t^{a+2b-1}+t^{b+2c-1}+t^{c+2a-1})$$
$$\geq 3(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1})\ \ \forall t>0$$

$$\Rightarrow\int_0^1(t^{3a-1}+t^{3b-1}+t^{3c-1}+2(t^{a+2b-1}+t^{b+2c-1}+t^{c+2a-1}))\mathrm{dt}$$
$$\geq\int_0^1 3(t^{2a+b-1}+t^{2b+c-1}+t^{2c+a-1})\mathrm{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c}+\frac{2}{a+2b}+\frac{2}{b+2c}+\frac{2}{c+2a} \ge \frac{3}{2a+b}+\frac{3}{2b+c}+\frac{3}{2c+a}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

## Baøi toaùn 113.

Chöùng minh raèng vôùi moïi soá thöïc döông $a,b,c,d$ ta coù baát ñaúng thöùc

$$\frac{a-b}{a+2b+c}+\frac{b-c}{b+2c+d}+\frac{c-d}{c+2d+a}+\frac{d-a}{d+2a+b} \ge 0$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\frac{2a-2b}{a+2b+c}+\frac{2b-2c}{b+2c+d}+\frac{2c-2d}{c+2d+a}+\frac{2d-2a}{d+2a+b} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2a-2b}{a+2b+c}+1\right)+\left(\frac{2b-2c}{b+2c+d}+1\right)+$$

$$+\left(\frac{2c-2d}{c+2d+a}+1\right)+\left(\frac{2d-2a}{d+2a+b}+1\right) \ge 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a+c}{a+2b+c}+\frac{3b+d}{b+2c+d}+\frac{3c+a}{c+2d+a}+\frac{3d+b}{d+2a+b} \ge 4$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{b+2c+d}+\frac{c}{c+2d+a}+\frac{d}{d+2a+b}\right)+$$

$$+\left(\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{b+d}{b+2c+d}+\frac{c+a}{c+2d+a}+\frac{d+b}{d+2a+b}\right) \ge 4$$

AÙp duïng baát ñaúng thöùc Bunhiacopxki, ta coù

$$\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{b+2c+d}+\frac{c}{c+2d+a}+\frac{d}{d+2a+b}=$$

$$=\frac{a^2}{a(a+2b+c)}+\frac{b^2}{b(b+2c+d)}+\frac{c^2}{c(c+2d+a)}+\frac{d^2}{d(d+2a+b)}$$

$$\ge \frac{(a+b+c+d)^2}{a(a+2b+c)+b(b+2c+d)+c(c+2d+a)+d(d+2a+b)}$$

$$=\frac{(a+b+c+d)^2}{(a+b+c+d)^2}$$

$$=1$$

Do ño

$$2\left(\frac{a}{a+2b+c}+\frac{b}{b+2c+d}+\frac{c}{c+2d+a}+\frac{d}{d+2a+b}\right)\geq 2 \qquad (1)$$

Mat khac, ap dung bat ñang thöc AM-GM, ta lai co

$$\frac{a+c}{a+2b+c}+\frac{b+d}{b+2c+d}+\frac{c+a}{c+2d+a}+\frac{d+b}{d+2a+b}=$$

$$=(a+c)\left(\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{c+2d+a}\right)+(b+d)\left(\frac{1}{b+2c+d}+\frac{1}{d+2a+b}\right)$$

$$\geq (a+c).\frac{4}{(a+2b+c)+(c+2d+a)}+(b+d).\frac{4}{(b+2c+d)+(d+2a+b)}$$

$$=2 \qquad (2)$$

Tö (1) va (2), ta suy ra ñieu phai chöng minh.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=c,b=d$.

## Bai toan 114.

Cho cac so döông $a,b,c.$ Chöng minh rang

$$\frac{a^2}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^2}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^2}{c^2+ca+a^2}\geq 1$$

*Lôi giai.*

Do ca 2 ve cua bat ñang thöc ña cho ñong bac nen khong mat tính tong quat, ta co the gia sö $abc=1$. Ñat $a=\frac{y}{x},b=\frac{z}{y},c=\frac{x}{z}$ $(x,y,z>0)$. Khi ño, bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\geq 1$$

Ap dung bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$\sum_{cyc}\frac{x^4}{x^4+x^2yz+y^2z^2}\geq\frac{(x^2+y^2+z^2)^2}{x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz(x+y+z)}$$

Do ño, ñe chöng minh bat ñang thöc ña cho, ta chæ can chöng minh

$$(x^2+y^2+z^2)^2 \ge x^4+y^4+z^4+x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2+xyz(x+y+z)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\sum_{cyc} z^2(x-y)^2 \ge 0 \text{ (ñuùng)}$$

$$\Rightarrow \text{ ñpcm.}$$

Ñaúng thöùc xaûy ra khi vaø chæ khi $a=b=c$.

## Baøi toaùn 115.

Chöùng minh raèng vôùi moïi soá thöïc döông $a,b,c$ ta coù baát ñaúng thöùc

$$\frac{a^2-bc}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}}+\frac{b^2-ca}{\sqrt{7b^2+2c^2+2a^2}}+\frac{c^2-ab}{\sqrt{7c^2+2a^2+2b^2}} \ge 0$$

*Lôøi giaûi.*

Ta coù baát ñaúng thöùc caàn chöùng minh töông ñöông vôùi

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2-2bc}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a+c)-(c-a)(a+b)}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)(a+c)}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}}-\sum_{cyc}\frac{(c-a)(a+b)}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)\left(\frac{a+c}{\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}}-\frac{b+c}{\sqrt{7b^2+2c^2+2a^2}}\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc} S_c(a-b)^2 \ge 0$$

Trong ñoù

$$S_a=\frac{(2(b+c)(b^2+c^2)+4a^3+4a(b^2+c^2)-3a^2(b+c)-10abc)\sqrt{2b^2+2c^2+7a^2}}{(a+b)\sqrt{7c^2+2a^2+2b^2}+(a+c)\sqrt{7b^2+2c^2+2a^2}}$$

$$S_b=\frac{(2(c+a)(c^2+a^2)+4b^3+4b(c^2+a^2)-3b^2(c+a)-10abc)\sqrt{2c^2+2a^2+7b^2}}{(b+c)\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}+(a+b)\sqrt{7c^2+2a^2+2b^2}}$$

$$S_c=\frac{(2(a+b)(a^2+b^2)+4c^3+4c(a^2+b^2)-3c^2(a+b)-10abc)\sqrt{2a^2+2b^2+7c^2}}{(a+c)\sqrt{7b^2+2c^2+2a^2}+(b+c)\sqrt{7a^2+2b^2+2c^2}}$$

Ap dung bat ñang thöc AM-GM va bat ñang thöc Bunhiacopxki, ta co

$$2(a+b)(a^2+b^2)+4c^3+4c(a^2+b^2)-3c^2(a+b)-10abc \geq$$
$$\geq 8\left(\frac{a+b}{2}\right)^3+4c^3+8c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-6c^2\left(\frac{a+b}{2}\right)-10c\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$
$$=(a+b+2c)\left(4\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-5c\left(\frac{a+b}{2}\right)+2c^2\right)$$
$$\geq 0$$

Do ño $S_c \geq 0$. Töông töï, ta co $S_a, S_b \geq 0$.

Vay

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \geq 0 \quad \text{(ñpcm)}$$

## Bai toan 116. (Vo Quoc Ba Can)

Chöng minh rang vôi moi so thöc döông $a,b,c$ ta co bat ñang thöc

$$(a+b+c)^2\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right) \geq 9(a^2+b^2+c^2)$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b}+\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}+3\sum_{cyc}ab+2\sum_{cyc}a^2+2\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c} \geq 9\sum_{cyc}a^2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a^3}{b}+\sum_{cyc}\frac{a^2b}{c}+2\sum_{cyc}\frac{ab^2}{c} \geq 7\sum_{cyc}a^2-3\sum_{cyc}ab$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b}+ab-2a^2\right)+\sum_{cyc}\left(\frac{a^2b}{c}+bc-2ab\right)+$$
$$+2\sum_{cyc}\left(\frac{ab^2}{c}+ac-2ab\right) \geq 5\sum_{cyc}a^2-5\sum_{cyc}ab$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{a(a-b)^2}{b}+\sum_{cyc}\frac{b(c-a)^2}{c}+2\sum_{cyc}\frac{a(b-c)^2}{c} \geq \frac{5}{2}.\sum_{cyc}(a-b)^2$$
$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}S_a(b-c)^2 \geq 0$$

Trong ño

$$S_a = \frac{b}{c} + \frac{a}{b} + \frac{2a}{c} - \frac{5}{2}$$
$$S_b = \frac{c}{a} + \frac{b}{c} + \frac{2b}{a} - \frac{5}{2}$$
$$S_c = \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{2c}{b} - \frac{5}{2}$$

Co 2 tröông hôp xay ra

+ Tröông hôp 1. $a \ge b \ge c > 0$. Khi ño, ta co $S_a \ge 0$.

+ Tröông hôp 1.1. $S_b \ge 0$. Khi ño, ta se chöng minh

$$S_b + S_c \ge 0 \qquad (1)$$

That vay

$$(*) \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{2c}{b}\right) + \frac{2c}{a} \ge 5$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{b}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) \ge 5$$

Ap duing bat ñang thöc AM-GM, ta co

$$\frac{b}{2c} + \frac{2c}{b} \ge 2$$
$$\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) \ge \frac{a}{b} + \frac{2b}{a} + 2\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$= \left(\frac{a}{2b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{a}{2b} + \sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$$
$$\ge 2 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}}$$

Do ño

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{2b}{a}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{b}\right) + \left(\frac{b}{2c} + \frac{2c}{a}\right) \ge 4 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} > 5$$

Vay (1) ñung.

Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (S_b+S_c)(a-b)^2\ge 0$$

+ Tröông hôp 1.2. $S_b\le 0$. Khi ño, ta se chöng minh

$$S_a+2S_b\ge 0 \qquad (2)$$
$$S_c+2S_b\ge 0 \qquad (3)$$

That vay, ta co

$$\begin{aligned}S_a+2S_b&=\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+2\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\frac{3b}{c}-\frac{15}{2}\\&\ge 4+4+3-\frac{15}{2}\\&>0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (2) ñung.

$$\begin{aligned}S_c+2S_b&=\left(\frac{a}{b}+\frac{4b}{a}\right)+2\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\frac{3c}{a}-\frac{15}{2}\\&\ge 4+4+0-\frac{15}{2}\\&>0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (3) ñung.

Chu y rang $(a-c)^2\le 2(a-b)^2+2(b-c)^2$

Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\ge (2S_b+S_c)(a-b)^2+(S_a+2S_b)(b-c)^2\ge 0$$

+ Tröông hôp 2. $c\ge b\ge a>0$. Khi ño, ta co $S_b>0$. Theo (1), ta co $S_b+S_c\ge 0$

Ta se chöng minh

$$S_a+S_b\ge 0 \qquad (4)$$

That vay

$$\begin{aligned}S_a+S_b&=\left(\frac{2b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{2a}{c}\right)+\frac{2b}{c}-5\\&\ge 3+2\sqrt{2}+0-5\\&>0\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (4) ñung.

Do ño

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge (S_b+S_c)(a-b)^2+(S_a+S_b)(b-c)^2 \ge 0$$

Tom lai, trong moi tröông hôp, ta luon co

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2 \ge 0$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

Ñang thöc xay ra khi va chæ khi $a=b=c$.

Bai toan 117.

Cho cac so thöc döông $a,b,c$ thoa $abc=1$. Chöng minh rang

$$4\left(\frac{1}{a(1+bc)^2}+\frac{1}{b(1+ca)^2}+\frac{1}{c(1+ab)^2}\right) \le 1+\frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

*Lôi giai.*

Ta co bat ñang thöc can chöng minh töông ñöông vôi

$$4\sum_{cyc}\frac{1}{a(1+bc)^2} \le 1+\frac{16}{(1+ab)(1+bc)(1+ca)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a^2}{a(a+abc)^2} \le 1+\frac{16abc}{(a+abc)(b+abc)(c+abc)}$$

$$\Leftrightarrow 4\sum_{cyc}\frac{a}{(a+1)^2} \le 1+\frac{16}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Ñat $x=\frac{2}{a+1}-1, y=\frac{2}{b+1}-1, z=\frac{2}{c+1}-1$ thì ta co

$$(1-x)(1-y)(1-z)=(1+x)(1+y)(1+z) \Rightarrow x+y+z+xyz=0$$

Bat ñang thöc can chöng minh trô thanh

$$(1-x)(1+x)+(1-y)(1+y)+(1-z)(1+z) \le 1+2(1+x)(1+y)(1+z)$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)+2(x+y+z+xyz) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^2 \ge 0 \quad \text{(ñung)}$$

$\Rightarrow$ ñpcm.

**Bài toán 118. (Phạm Văn Thuận)**

Cho các số không âm $a,b,c$ thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}+\frac{b^3}{c^2-ca+a^2}+\frac{c^3}{a^2-ab+b^2}\ge\sqrt{2}$$

***Lời giải.***

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^2-bc+c^2}\ge\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3}{b^3+c^3}.(b+c)\ge\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{a^3}{b^3+c^3}.(b+c)+b+c\right)\ge 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{a^3+b^3+c^3}{b^3+c^3}.(b+c)\ge 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow(a^3+b^3+c^3).\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge 2(a+b+c)+\sqrt{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^2-ab+b^2}\ge\frac{9}{2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{9(a^3+b^3+c^3)}{2(a^2+b^2+c^2)-ab-bc-ca}\ge\sqrt{2}+2(a+b+c)\qquad(*)$$

Đặt $p=a+b+c,q=ab+bc+ca,r=abc\ge 0\Rightarrow 0\le q\le 1,p=\sqrt{1+2q}$.

Khi đó

$$(*)\Leftrightarrow 9(p(1-q)+3r)\ge\left(2p+\sqrt{2}\right)(2-q)$$

$$\Leftrightarrow 9p-9pq+27r\ge 4p-2pq-\sqrt{2}q+2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 5p-7pq+\sqrt{2}q+27r\ge 2\sqrt{2}\qquad(**)$$

Có 2 trường hợp xảy ra

**+ Trường hợp 1.** $2q \le 1$.

Khi đó

$$(**) \Leftrightarrow f(q) = 5\sqrt{2q+1} - 7q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2}q + 27r \ge 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$f'(q) = \frac{5}{\sqrt{2q+1}} - 7\sqrt{2q+1} - \frac{7q}{\sqrt{2q+1}} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2(2q+1)} - (21q+2)}{\sqrt{2q+1}}$$

$$\le \frac{\sqrt{2(1+1)} - 21q - 2}{\sqrt{2q+1}}$$

$$= -\frac{21q}{\sqrt{2q+1}}$$

$$\le 0$$

$\Rightarrow f(q)$ là hàm nghịch biến.

$$\Rightarrow f(q) \ge f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 27r \ge 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ (**) đúng.

**+ Trường hợp 2.** $2q \ge 1$. Khi đó, theo bất đẳng thức Schur, ta có

$$r \ge \frac{4pq - p^3}{9} = \frac{p(4q - p^2)}{9} = \frac{p(2q-1)}{9} \ge 0$$

Do đó, để chứng minh (**), ta chỉ cần chứng minh

$$5p - 7pq + \sqrt{2}q + 3p(2q-1) \ge 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2p - pq + \sqrt{2}q \ge 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow g(q) = 2\sqrt{2q+1} - q\sqrt{2q+1} + \sqrt{2}q \ge 2\sqrt{2}$$

Ta có

$$g'(q) = \frac{2}{\sqrt{2q+1}} - \sqrt{2q+1} - \frac{q}{\sqrt{2q+1}} + \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{2(2q+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}}$$

$$\geq \frac{\sqrt{2(1+1)} - 3q + 1}{\sqrt{2q+1}}$$

$$= \frac{3(1-q)}{\sqrt{2q+1}}$$

$\geq 0$ (do $q \leq 1$)

$\Rightarrow g(q)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow g(q) \geq g\left(\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow$ (**) đúng.

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$\frac{a^3}{b^2 - bc + c^2} + \frac{b^3}{c^2 - ca + a^2} + \frac{c^3}{a^2 - ab + b^2} \geq \sqrt{2} \text{ (đpcm)}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

**Bài toán 119. (Belarus 1998)**

Chứng minh rằng với mọi số dương $a,b,c$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

***Lời giải.***

**+ Cách 1.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{ab^2 + bc^2 + ca^2 - 3abc}{abc} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} - 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sum_{cyc} (a-b)^2 \left(\frac{1}{6}.a - \frac{1}{6}.b + \frac{1}{2}.c\right)}{abc} \geq \frac{(c-a)^2}{(a+b)(b+c)}$$

$$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(\frac{a-b+3c}{abc}\right)+(b-c)^2\left(\frac{b-c+3a}{abc}\right)+$$
$$+(c-a)^2\left(\frac{c-a+3b}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}\right)\geq 0$$

Đặt

$$S_a=\frac{b-c+3a}{abc}$$
$$S_b=\frac{c-a+3b}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}$$
$$S_c=\frac{a-b+3c}{abc}$$

Bất đẳng thức cần chứng minh trở thành $S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$

Có 2 trường hợp xảy ra

**+ Trường hợp 1.** $a\geq c>0$.

**+ Trường hợp 1.1.** $a\geq b\geq c>0$. Khi đó, ta có $S_a,S_c\geq 0$.

**+ Trường hợp 1.1.1.** $b+c\geq a$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} S_b&=\frac{c-a+3b}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}\\ &=\frac{(b+c-a)+2b}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}\\ &\geq\frac{2}{ac}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}\\ &=\frac{2(ab+b(b+c)-2ac)}{ac(a+b)(b+c)}\geq 0\end{aligned}$$

Do đó

$$S_a(b-c)^2+S_b(c-a)^2+S_c(a-b)^2\geq 0$$

**+ Trường hợp 1.1.2.** $a\geq b+c$.

Khi đó, xét hàm số $f(a)=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a+b}{b+c}-\frac{b+c}{a+b}-1$ với $a\geq b+c$

Ta có

$$f'(a)=\frac{1}{b}-\frac{c}{a^2}-\frac{1}{b+c}+\frac{b+c}{(a+b)^2}$$
$$=\frac{c}{b(b+c)}-\frac{c}{a^2}+\frac{b+c}{(a+b)^2}$$
$$>0$$

$\Rightarrow f(a)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow f(a)\ge f(b+c)=\frac{b+c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b+c}-\frac{2b+c}{b+c}-\frac{b+c}{2b+c}-1$$
$$=\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-\frac{2b}{b+c}-\frac{b+c}{2b+c}$$

Ta lại có

$$f(b+c)>0 \qquad (*)$$

Thật vậy

$$(*)\Leftrightarrow (b^2+c^2)(b+c)(2b+c)-2b^2c(2b+c)-bc(b+c)^2>0$$
$$\Leftrightarrow (b-c)^2(2b+c)+b^2c(b-c)+2bc^3>0 \text{ (đúng do } b\ge c>0)$$

$\Rightarrow$ (*) đúng.

$\Rightarrow f(a)>0$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}>\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

**+ Trường hợp 1.2.** $a\ge c\ge b>0$. Khi đó, ta có $S_a, S_c\ge 0$.

Ta có

$$S_b+S_c=\frac{2b+4c}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}$$
$$\ge\frac{4c}{abc}-\frac{6}{(a+b)(b+c)}$$
$$=\frac{2(2(a+b)(b+c)-3ab)}{ab(a+b)(b+c)}$$
$$=\frac{2(2b^2+2bc+2ac-ab)}{ab(a+b)(b+c)}$$
$$\ge 0$$

Do $a \geq c \geq b > 0$ nên $(a-b)^2 \geq (a-c)^2$. Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (c-a)^2(S_b + S_c) \geq 0$$

**+ Trường hợp 1.3.** $b \geq a \geq c > 0$. Khi đó, ta có

$$S_a = \frac{b-c+3a}{abc} \geq 0$$

$$S_b = \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$\geq \frac{2}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{2(b^2+ab+bc-2ac)}{ac(a+b)(b+c)}$$

$$\geq 0$$

$$S_a + S_c = \frac{4a+2c}{abc} \geq 0$$

Do $b \geq a \geq c > 0$ nên $(b-c)^2 \geq (a-b)^2$. Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (a-b)^2(S_a + S_c) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.** $c \geq a > 0$.

**+ Trường hợp 2.1.** $c \geq b \geq a > 0$. Khi đó, ta có

$$S_c = \frac{a-b+3c}{abc} \geq 0$$

$$S_b = \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$\geq \frac{c+2b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$

$$= \frac{3(b^2+ab+bc-ac)}{ac(a+b)(b+c)}$$

$$\geq 0$$

$$S_a + S_b = \frac{2a+4b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$
$$\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+b)(b+c)}$$
$$= \frac{3(b^2+ab+bc-ac)}{ac(a+b)(b+c)} \geq 0$$

Do $c \geq b \geq a > 0$ nên $(c-a)^2 \geq (b-c)^2$. Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (b-c)^2(S_a+S_b) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.2.** $c \geq a \geq b > 0$. Khi đó, ta có $S_c \geq 0$.

**+ Trường hợp 2.2.1.** $c \geq a+b > 0$.

Khi đó, xét hàm số $g(c) = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{a+b}{b+c} - \frac{b+c}{a+b} - 1$ với $c \geq a+b$

Ta có

$$g'(c) = \frac{1}{a} - \frac{b}{c^2} - \frac{1}{a+b} + \frac{a+b}{(b+c)^2}$$
$$= \frac{b}{a(a+b)} - \frac{b}{c^2} + \frac{a+b}{(b+c)^2}$$
$$> 0$$

$\Rightarrow g(c)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow g(c) \geq g(a+b) = \frac{a}{b} + \frac{b}{a+b} + \frac{a+b}{a} - \frac{a+b}{a+2b} - \frac{a+2b}{a+b} - 1$$
$$= \frac{a}{b} + \frac{b}{a} - \frac{2a+3b}{a+2b}$$

Ta lại có

$$g(a+b) > 0 \qquad (**)$$

Thật vậy

$$(**) \Leftrightarrow (a^2+b^2)(a+2b) - ab(2a+3b) > 0$$
$$\Leftrightarrow 2b^3 - 2b^2a + a^3 > 0 \text{ (đúng)}$$

$\Rightarrow$ (**) đúng.

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} > \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{a+b}+1$$

**+ Trường hợp 2.2.2.** $a+b \geq c$. Khi đó, ta có $S_a \geq 0$.

Ta có

$$\begin{aligned} S_a + S_b &= \frac{2a+4b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{2c}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{2((a+b)(b+c)-3ab)}{ab(a+b)(b+c)} \\ &= \frac{2(ac+bc+b^2-2ab)}{ab(a+b)(b+c)} \geq 0 \end{aligned}$$

Do $c \geq a \geq b > 0$ nên $(b-c)^2 \geq (c-a)^2$. Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq (c-a)^2(S_a+S_b) \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.3.** $b \geq c \geq a > 0$. Khi đó, ta có

$$S_a = \frac{b-c+3a}{abc} \geq 0$$

$$\begin{aligned} S_b &= \frac{c-a+3b}{abc} - \frac{6}{(a+b)(b+c)} \\ &\geq \frac{3}{ac} - \frac{6}{(a+a)(c+c)} \\ &= \frac{3}{2ac} \\ &> 0 \end{aligned}$$

**+ Trường hợp 2.3.1.** $c+a \geq b > 0$. Khi đó, ta có $S_b \geq 0$. Do đó

$$S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2 \geq 0$$

**+ Trường hợp 2.3.2.** $b \geq c+a$.

Khi đó, xét hàm số $h(b) = \frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}-\frac{a+b}{b+c}-\frac{b+c}{a+b}-1$ với $b \geq c+a$.

Ta có

$$h'(b) = \frac{b^2 - ac}{b^2 c} + (c-a)\left(\frac{1}{(b+a)^2} - \frac{1}{(b+c)^2}\right) \geq 0$$

$\Rightarrow$ $h(b)$ là hàm đồng biến.

$$\Rightarrow h(b) \geq h(a+c) = \frac{a}{a+c} + \frac{a+c}{c} + \frac{c}{a} - \frac{2a+c}{a+2c} - \frac{a+2c}{2a+c} - 1$$

$$= \frac{a}{a+c} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} - \frac{2a+c}{a+2c} - \frac{a+2c}{2a+c}$$

$$= \frac{a}{a+c} + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a} - 2\right) - \left(\frac{2a+c}{a+2c} + \frac{a+2c}{2a+c} - 2\right)$$

$$= \frac{a}{a+c} + \frac{(c-a)^2}{ca} - \frac{(c-a)^2}{(a+2c)(2a+c)}$$

$$= \frac{a}{a+c} + (c-a)^2\left(\frac{1}{ca} - \frac{1}{(2a+c)(a+2c)}\right) \geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{a+b}{b+c} + \frac{b+c}{a+b} + 1$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c$.

**+ Cách 2.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\frac{a(a+b)(b+c)}{b} + \frac{b(a+b)(b+c)}{c} + \frac{c(a+b)(b+c)}{a} \geq$$
$$\geq (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+b)(b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2c}{b} + a^2 + ab + ac + \frac{b^2(a+b)}{c} + b^2 + ab + c^2 + bc + \frac{bc(b+c)}{a} \geq$$
$$\geq a^2 + ac + c^2 + 3b^2 + 3ab + 3bc$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2c}{b} + \frac{b^2(a+b)}{c} + \frac{bc(b+c)}{a} \geq ab + 2bc + 2b^2$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM, ta có

$$\frac{1}{2}.\left(\frac{a^2c}{b} + \frac{b^3}{c}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{a^2c}{b} + \frac{bc^2}{a}\right) + \frac{1}{2}.\left(\frac{b^3}{c} + \frac{bc^2}{a}\right) + b^2\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq$$

$$\geq ab+\left(\sqrt{ac^3}+\sqrt{\frac{b^4c}{a}}\right)+2b^2$$

$$\geq ab+2bc+2b^2$$

$$\Rightarrow \frac{a^2c}{b}+\frac{b^2(a+b)}{c}+\frac{bc(b+c)}{a}\geq ab+2bc+2b^2$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài toán 120.**

Chứng minh rằng với mọi số thực không âm $a,b,c$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}\geq\frac{3}{ab+bc+ca}$$

***Lời giải.***

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $c=\min\{a,b,c\}$. Khi đó, ta có

$$\begin{cases}0\leq b^2-bc+c^2\leq b^2\\ 0\leq c^2-ca+a^2\leq a^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{1}{b^2-bc+c^2}\geq\dfrac{1}{b^2}\\ \dfrac{1}{c^2-ca+a^2}\geq\dfrac{1}{a^2}\end{cases}$$

Do đó

$$\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2-bc+c^2}+\frac{1}{c^2-ca+a^2}-\frac{3}{ab+bc+ca}\geq$$

$$\geq\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{3}{ab+bc+ca}$$

$$\geq\frac{1}{a^2-ab+b^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}-\frac{3}{ab}$$

$$=\frac{(a-b)^4}{a^2b^2(a^2-ab+b^2)}$$

$$\geq 0$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $(a,b,c)=(t,t,0)$ $(t>0)$.

**Bài toán 121.**

Tìm $k$ lớn nhất sao cho với mọi số không âm $a,b,c$ $((a+b)(b+c)(c+a)>0)$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge k\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

***Lời giải.***

Cho $a=b=1,c=0$ ta suy ra được $k\le\frac{4}{5}$. Ta chứng minh đây là giá trị cần tìm, tức là chứng minh

$$\frac{a}{b^2+c^2}+\frac{b}{c^2+a^2}+\frac{c}{a^2+b^2}\ge\frac{4}{5}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

**+ Cách 1.**

Do 2 vế của bất đẳng thức trên đồng bậc nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a+b+c=1$. Đặt $q=ab+bc+ca,r=abc\Rightarrow\frac{1}{3}\ge q>0,\frac{1}{27}\ge r\ge 0$. Khi đó, ta có

$$\begin{aligned}\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2}&=\frac{\sum\limits_{cyc}a(a^2+b^2)(a^2+c^2)}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\\&=\frac{\sum\limits_{cyc}a(a^2(a^2+b^2+c^2)+b^2c^2)}{(a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)-a^2b^2c^2}\\&=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^2+b^2+c^2)+abc(ab+bc+ca)}{(1-2q)(q^2-2r)-r^2}\\&=\frac{(3r+1-3q)(1-2q)+qr}{-r^2-2r(1-2q)+q^2(1-2q)}\\&=\frac{(3-5q)r+(1-2q)(1-3q)}{-r^2-2r(1-2q)+q^2(1-2q)}\end{aligned}$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a+b}=\frac{\sum\limits_{cyc}(a+b)(a+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}=\frac{\sum\limits_{cyc}(a(a+b+c)+bc)}{(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc}=\frac{q+1}{q-r}$$

Do đó, bất đẳng thức cần chứng minh trở thành

$$\frac{(3-5q)r+(1-2q)(1-3q)}{-r^2-2r(1-2q)+q^2(1-2q)} \geq \frac{4}{5}.\frac{1+q}{-r+q}$$

$$\Leftrightarrow f(r)=(29q-11)r^2+(3+32q-71q^2)r+q(1-2q)(5+q)(1-4q)\geq 0$$

Ta có

$$f'(r)=2(29q-11)r+3+32q-71q^2$$
$$\geq 2(29q-11).\frac{1}{27}+3+32q-71q^2$$
$$=\frac{59}{27}+\frac{922}{27}.q-71q^2\geq 0 \quad (\text{do } 0\leq q\leq \frac{1}{3})$$

$\Rightarrow f(r)$ là hàm đồng biến.

+ Nếu $1\geq 4q$ thì ta có $f(r)\geq f(0)=q(1-2q)(5+q)(1-4q)\geq 0$

+ Nếu $4q\geq 1$ thì theo bất đẳng thức Schur, ta có $r\geq \frac{4q-1}{9}\geq 0$. Do đó

$$f(r)\geq f\left(\frac{4q-1}{9}\right)=\frac{2(4q-1)(81q^3+103q^2-95q+19)}{81}\geq 0$$

Tóm lại, trong mọi trường hợp, ta luôn có $f(r)\geq 0 \Rightarrow$ đpcm.

Vậy $k_{\max}=\frac{4}{5}$.

**+ Cách 2.**

Ta có bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$\sum_{cyc}\frac{5a}{b^2+c^2}\geq \sum_{cyc}\frac{4}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{5a(a+b+c)}{b^2+c^2}\geq \sum_{cyc}\frac{4(a+b+c)}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{10a^2+10a(b+c)}{b^2+c^2}\geq 24+\sum_{cyc}\frac{8a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow 8\left(\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+c^2}-\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}\right)+\left(\sum_{cyc}\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}-\frac{9}{2}\right)+$$

$$+\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c)-bc}{b^2+c^2}-\frac{3}{2}\right)+9\left(\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}-2\right)\geq 0$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+c^2}\geq\sum_{cyc}\frac{a}{b+c} \quad (1)$$

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}\geq\frac{9}{2} \quad (2)$$

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)-bc}{b^2+c^2}\geq\frac{3}{2} \quad (3)$$

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}\geq 2 \quad (4)$$

*** Chứng minh (1).**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a^2}{b^2+c^2}\geq\sum_{cyc}\frac{a}{b+c}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{a^2}{b^2+c^2}-\frac{a}{b+c}\right)\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)-ca(c-a)}{(b^2+c^2)(b+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)}-\sum_{cyc}\frac{ca(c-a)}{(b^2+c^2)(b+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{(b^2+c^2)(b+c)}-\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)}{(a^2+c^2)(a+c)}\geq 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca).\sum_{cyc}\frac{ab(a-b)^2}{(a^2+c^2)(b^2+c^2)(a+c)(b+c)}\geq 0 \ \text{(đúng)}$$

*** Chứng minh (2).**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{2a^2+bc}{b^2+c^2}\ge\frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\left(\frac{4q^2+2bc}{b^2+c^2}-3\right)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{4a^2-3(b^2+c^2)+2bc}{b^2+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(2a+3b-c)(a-b)-(2a-b+3c)(c-a)}{b^2+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(2a+3b-c)(a-b)}{b^2+c^2}-\sum_{cyc}\frac{(2a-b+3c)(c-a)}{b^2+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(2a+3b-c)(a-b)}{b^2+c^2}-\sum_{cyc}\frac{(3a+2b-c)(a-b)}{a^2+c^2}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(2a^2+2b^2-c^2-c(a+b)+3ab)}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2(2a^2+2b^2-c^2-c(a+b)+3ab)(a^2+b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow\sum_{cyc}(a-b)^2(2a^2+2b^2-2c^2+2ab+(c^2-c(a+b)+ab))(a^2+b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2)+2\sum_{cyc}ab(a-b)^2(a^2+b^2)-$$
$$-(a-b)(b-c)(c-a).\sum_{cyc}(a-b)(a^2+b^2)\ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2)+2\sum_{cyc}ab(a-b)^2(a^2+b^2)-$$
$$-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2\ge 0$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $a\ge b\ge c\ge 0$. Khi đó, ta có

$$\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2)\ge$$
$$\ge(b-c)^2(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2)+(c-a)^2(c^2+a^2-b^2)(c^2+a^2)$$
$$\ge(b-c)^2(b^2+c^2-a^2)(b^2+c^2)+(b-c)^2(c^2+a^2-b^2)(b^2+c^2)$$
$$=2c^2(b-c)^2(b^2+c^2)$$
$$\ge 0$$

$$2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) \ge 2ab(a-b)^2(a^2+b^2) \ge 4(a-b)^2a^2b^2$$

$$\ge 4(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2$$

$$\Rightarrow 2\sum_{cyc}(a-b)^2(a^2+b^2-c^2)(a^2+b^2) + 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) -$$

$$-(a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0$$

*** Chứng minh (3).**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)-bc}{b^2+c^2} \ge \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\left(\frac{2a(b+c)-2bc}{b^2+c^2}-1\right) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{-(b^2+c^2)+2a(b+c)-2bc}{b^2+c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)(a-b)-(b+c)(c-a)}{b^2+c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyc}\frac{(b+c)(c-a)}{b^2+c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(b+c)(a-b)}{b^2+c^2} - \sum_{cyc}\frac{(a+c)(a-b)}{a^2+c^2} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}\frac{(a-b)^2(-c^2+c(a+b)+ab)}{(b^2+c^2)(a^2+c^2)} \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2(-c^2+c(a+b)+ab)(a^2+b^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{cyc}(a-b)^2((-c^2+c(a+b)-ab)+2ab)(a^2+b^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) + (a-b)(b-c)(c-a).\sum_{cyc}(a-b)(a^2+b^2) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sum_{cyc} ab(a-b)^2(a^2+b^2) + (a-b)^2(b-c)^2(c-a)^2 \ge 0 \ \text{(đúng)}$$

*** Chứng minh (4).**

Ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}-2=\frac{\sum_{cyc}ab(a-b)^2(a^2+b^2+2c^2)+8a^2b^2c^2}{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}\geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{cyc}\frac{a(b+c)}{b^2+c^2}\geq 2$$

Vậy (1), (2), (3) và (4) đúng. Từ đây, ta suy ra đpcm.

Vậy

$$k_{\max}=\frac{4}{5}.$$

*** Cách 3.**

Áp dụng bất đẳng Bunhiacopxki, ta có

$$\sum_{cyc}\frac{a}{b^2+c^2}\geq\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}ab(a+b)}$$

Do đó, để chứng minh bất đẳng thức đã cho, ta chỉ cần chứng minh

$$\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}ab(a+b)}\geq\frac{4}{5}.\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc}ab(a+b)}\geq\frac{4}{5}.\frac{a^2+b^2+c^2+3(ab+bc+ca)}{\sum_{cyc}ab(a+b)+2abc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(S+2P)}{Q}\geq\frac{4(S+3P)}{Q+2abc}$$

$$\Leftrightarrow SQ+10abcS+20abcP\geq 2PQ$$

Trong đó $S=a^2+b^2+c^2, P=ab+bc+ca, Q=\sum_{cyc}ab(a+b)$.

Dễ thấy

$$PQ=\sum_{cyc}a^2b^2(a+b)+2abc(S+P)$$

$$SQ\geq\sum_{cyc}ab(a^2+b^2)(a+b)\geq 2\sum_{cyc}a^2b^2(a+b)$$

Từ đây, ta có ngay đpcm.

Vậy

$$k_{\max} = \frac{4}{5}.$$

## Bài toán 122. (Vasile Cirtoaje)

Chứng minh rằng với mọi số không $a,b,c$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

***Lời giải.***

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có

$$\begin{aligned}(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)&=(a^2+a^2+b^2)(a^2+c^2+a^2)\\&\ge(a^2+ac+ab)^2\\&=a^2(a+b+c)^2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}\le\frac{a}{(a+b+c)^2}$$

Tương tự, ta có

$$\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}\le\frac{b}{(a+b+c)^2}$$

$$\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{c}{(a+b+c)^2}$$

Do đó

$$\frac{a^3}{(2a^2+b^2)(2a^2+c^2)}+\frac{b^3}{(2b^2+c^2)(2b^2+a^2)}+\frac{c^3}{(2c^2+a^2)(2c^2+b^2)}\le\frac{1}{a+b+c}$$

$\Rightarrow$ đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

**Bài toán 123. (Phạm Kim Hùng)**

Chứng minh rằng với mọi dãy số dương $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + ... + \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \le 2\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}\right)$$

***Lời giải.***

Nếu $n = 1$ thì bất đẳng thức trên hiển nhiên đúng.

Xét $n \ge 2$.

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki, ta có với mọi số dương $x_1, x_2, ..., x_n$ thì

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + ... + \frac{x_k^2}{a_k}\right) \ge (x_1 + x_2 + ... + x_k)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_k} \le \frac{1}{(x_1 + x_2 + ... + x_k)^2}.\left(\frac{x_1^2}{a_1} + \frac{x_2^2}{a_2} + ... + \frac{x_k^2}{a_k}\right)$$

Cho $k$ chạy từ 1 đến $n$ rồi cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1 + a_2} + ... + \frac{1}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \le \frac{c_1}{a_1} + \frac{c_2}{a_2} + ... + \frac{c_n}{a_n}$$

Trong đó

$$c_k = \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + ... + x_k)^2} + \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + ... + x_{k+1})^2} + ... + \frac{x_k^2}{(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2} \quad \forall k = \overline{1, n}$$

Ta có thể chọn $x_k = k \ \ \forall k = \overline{1, n}$. Khi đó $\forall k \ge 2$, ta có

$$c_k = k^2\left(\frac{1}{(1 + 2 + ... + k)^2} + \frac{1}{(1 + 2 + ... + (k+1))^2} + ... + \frac{1}{(1 + 2 + ... + n)^2}\right)$$

$$= k^2\left(\frac{4}{k^2(k+1)^2} + \frac{4}{(k+1)^2(k+2)^2} + ... + \frac{4}{n^2(n+1)^2}\right)$$

$$\le k^2\left(\frac{4}{k^2(k+1)^2} + \frac{4}{k^2(k+2)^2} + ... + \frac{4}{k^2(n+1)^2}\right)$$

$$\le 4\left(\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+2)^2} + ... + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

$$\le 4\left(\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$$

$$=4\left(\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)+\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)\le\frac{4}{k}\le 2$$

Ngoài ra

$$c_1=1+\frac{1}{(1+2)^2}+\ldots+\frac{1}{(1+2+\ldots+n)^2}$$

$$=1+\frac{4}{2^2.3^2}+\ldots+\frac{4}{n^2.(n+1)^2}$$

$$\le 1+\frac{4}{2^2.3^2}+\ldots+\frac{4}{2^2.(n+1)^2}$$

$$=1+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\le 1+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=1+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$$

$$<2$$

Do đó

$$c_k\le 2\ \ \forall k=\overline{1,n}$$

Từ đây, ta suy ra điều phải chứng minh.

**Bài toán 124. (Phạm Văn Thuận, Võ Quốc Bá Cẩn)**

Cho các số không âm $a,b,c$ thỏa $a^2+b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

***Lời giải.***

Trước hết, ta xét trường hợp $a=0$. Khi đó, bài toán chuyển về

"Các số không âm $b,c$ thỏa $b^2+c^2=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q=bc(c-b)(c+b)=bc(c^2-b^2)."$$

Không mất tính, tổng quát ta chỉ cần xét $c\ge b$ là đủ $\Rightarrow c^2\ge \frac{1}{2}$.

Ta có

$$Q^2=b^2c^2(c^2-b^2)^2=c^2(1-c^2)(2c^2-1)^2=m(1-m)(2m-1)^2=f(m)$$

Trong đó $m=c^2\ge \frac{1}{2}$.

Ta có

$$f'(m)=(1-2m)(8m^2-8m+1)$$

$$f'(m)=0\Leftrightarrow m=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\ \text{(do } m\ge \frac{1}{2})$$

Qua $\frac{2+\sqrt{2}}{4}$ thì $f'(m)$ đổi dấu từ dương sang âm nên

$$f(m)\le f\left(\frac{2+\sqrt{2}}{4}\right)=\frac{1}{16}\ \ \forall m\ge \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Q\le \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $b=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},c=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Vậy

$$\max Q=\frac{1}{4}.$$

Trở lại bài toán của ta

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $0\le a\le b\le c$.

Ta sẽ chứng minh $\max P=\frac{1}{4}$, tức là chứng minh

$$F(a,b,c)=\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}\ge 4$$

Khi đó, với mọi $0\le t\le \min\{a,b,c\}$, đặt $x=a-t, y=b-t, z=c-t,$ ta có

$$\begin{aligned}F(a,b,c)&=\frac{((x+t)^2+(y+t)^2+(z+t)^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}\\&=\frac{(3t^2+2(x+y+z)t+x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}\\&\ge\frac{(2(x+y+z)t+x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}\\&=\frac{4(x+y+z)^2t^2+4(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)t+(x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}\\&\ge\frac{4(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)t+(x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}\\&\ge\frac{4(x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z)}\\&=F(x,y,z)\end{aligned}$$

(vì hàm số $g(t)=\dfrac{4(x^2+y^2+z^2)(x+y+z)t+(x^2+y^2+z^2)^2}{(x-y)(y-z)(z-t)(x+y+z+3t)}$ là hàm đồng biến)

Áp dụng kết quả này với $t=a,$ ta được

$$F(a,b,c)\ge F(0,b-a,c-a)=F(0,m,n)=\frac{(m^2+n^2)^2}{mn(n^2-m^2)}$$

Với $n=c-a\ge m=b-a\ge 0$

Do đó, để chứng minh $F(a,b,c)\ge 4$, ta chỉ cần chứng minh

$$F(0,m,n)\ge 4$$
$$\Leftrightarrow (m^2+n^2)^2\ge 4mn(n^2-m^2) \qquad (*)$$

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $m^2+n^2=1$. Khi đó

$$(*)\Leftrightarrow nm(n^2-m^2)\le\frac{1}{4}$$

Theo chứng minh trên thì bất đẳng thức này đúng, từ đây, ta suy ra đpcm, tức là

$$P \le \frac{1}{4}.$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = 0, b = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, c = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Vậy $\max P = \frac{1}{4}$.

# TÀI LIỆU THAM KHẢO


[1] T.Andreescu, V.Cirtoaje, G.Dospinescu, M.Lascu, *Old and New Inequalities*
[2] Hojoo Lee, *Topics In Inequalities*
[3] Pierre Bornsztein, *Inégalités*
[4] K.S.Kedlaya, $A < B$
[5] Thomas J.Mildorf, *Olympiad Inequalities*
[6] Kin – Yin Li, *Using Tangent to Prove Inequalities*, Mathematical Excalibur, Vol.10, No. 05, Dec.05 – Jan.06
[7] Lau Chi Hin, *Muirhead' s Inequality*, Mathematical Excalibur, Vol.11, No.01, Feb.05 – Mar.06
[8] *Crux Mathematicorum*
[9] Phan Huy Khải, *10000 Bài Toán Sơ Cấp – Bất Đẳng Thức Kinh Điển*, NXB Hà Nội 2001
[10] *Tạp chí Toán Học Và Tuổi Trẻ*
[11] Phạm Kim Hùng, *Sáng tạo bất đẳng thức*, NXB Tri Thức 2006
[12] *Các trang web toán học*:
www.mathlinks.ro
diendantoanhoc.net
mathnfriend.net